TD1 : Intégrales de Riemann

Exercice 1. Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle sur $[a, b]$ (i.e. $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$).

Exercice 2. (**Formule de la moyenne - Résultat à connaître**)
Soient $a < b \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose : $\forall x \in [a, b],\ g(x) \geq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes à l'aide de la formule de la moyenne :
a. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{dt}{te^t}$ b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x^2+1}^{x^2+x+1}\frac{\arctan(t^2)}{\sqrt{t}}\,dt$ c. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{\cos(\pi t)}{\ln t}\,dt$

Exercice 4. (**Inégalité de Cauchy-Schwarz - Résultat à connaître**) Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right).$$

On suppose de plus f et g continues, montrer que l'on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles (i.e. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], f(x) = cg(x)$ ou $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], g(x) = cf(x)$).

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[0, T]$ et soit $a \in [0, T]$ tel que $f(a) = 0$.

1. Montrer que pour tout $u \in [a, T]$, $f^2(u) \leq (u - a)\int_a^u (f'(x))^2 dx$.
2. En déduire que pour tout $t \in [a, T]$, $\int_a^t f^2(x)dx \leq \frac{(t-a)^2}{2}\int_a^t (f'(x))^2 dx$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.
a. $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$ b. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$ c. $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$ e. $\displaystyle\int_0^1 x(\arctan x)^2\,dx$
f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Exercice 7. Calculer les intégrales de fonctions rationnelles suivantes.
a. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{x}{x^2+x-2}\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$ c. $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Exercice 8. Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant un changement de variable, montrer que

a. si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$,
b. si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$,
c. si f est périodique de période $T > 0$, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx$.

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable.
a. $\displaystyle\int_0^2\frac{dt}{t^2+a^2}$ avec $a > 0$ b. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ c. $\displaystyle\int_0^1 \sin(e^x)e^x\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^u \tan(t)\,dt$ avec $u \in [-\pi/2, \pi/2]$
e. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)^n}{t}\,dt$ avec $n \in \mathbb{N}$ f. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)^2\sin(x)\,dx$

Exercice 10. (Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a, b]$.

a. Montrer par récurrence (et à l'aide d'intégrations par parties) que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

b. En déduire la majoration suivante (inégalité de Taylor-Lagrange) :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

c. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$