TD 2 : Intégrales impropres

Exercice 1. (**Intégrales de Riemann - Résultat à connaître**)

Étudier la convergence des intégrales de Riemann suivantes et les calculer lorsqu'elles sont convergentes (leurs valeurs ne sont pas à connaître).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2. Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

est convergente, et la calculer lorsqu'elle est convergente.
Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

est convergente, et la calculer lorsqu'elle est convergente.

Exercice 3. (**Intégrales de Bertrand - Résultat à connaître**)

Étudier la convergence des intégrales de Bertrand suivantes.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_1^{2} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{xe^x+1}\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^4+x+1}\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1+t)^3}}$ e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{1+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$

f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ b. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2-3x-4}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

est divergente. En déduire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont semi-convergentes.

Exercice 7. À l'aide de comparaisons série-intégrale, montrer les équivalences de suites suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$ b. $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ c. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$

Apprentissage par problème

Par groupes de 3 ou 4 étudiant·e·s, réfléchissez à cet énoncé en suivant les étapes décrites plus bas. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Quels sont les liens entre l'affirmation "$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente" et l'affirmation "f tend vers 0 en $+\infty$" ? Et si on ajoute des hypothèses supplémentaires sur f ? (Par exemple, "f est continue", "f est uniformément continue", "f est lipschitzienne", "f est positive", "f est négative", "f est croissante", "f est décroissante", "f est bornée", "f est périodique", "f est dérivable", "f est $\mathcal{C}^1$", "f est $\mathcal{C}^\infty$", "f est dérivable de dérivée bornée", "f est dérivable de dérivée périodique", "f est $\mathcal{C}^1$ de dérivée périodique")

1. Comprendre les symboles et termes utilisés dans l'énoncé.
2. Préciser des questions auxquelles on voudrait répondre.
3. Émettre des conjectures pour répondre à ces questions.
4. Étudier les liens entre ces conjectures (certaines sont-elles contradictoires ? certaines en impliquent-elles d'autres ?).
5. Réflexion individuelle : Essayer de prouver ces conjectures.
6. Mettre en commun ce qui a été prouvé, les pistes qui ont été abordées mais n'ont pas abouti,... Essayer de prouver collectivement ces conjectures.
7. Faire un bilan de ce qui a été prouvé.

Ensuite nous ferons un bilan avec tout le groupe de TD de ce qui a été prouvé et une correction.