TD 3 : Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} I_n.$$
En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

a. Si les fonctions f_n sont croissantes alors f l'est aussi.

b. Si les fonctions f_n sont strictement croissantes alors f l'est aussi.

c. Si les fonctions f_n et f sont continues, alors la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f est uniforme.

Exercice 3. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ suivantes :

a. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ sur $]-1,1[$ puis sur $[-a,a]$ avec $0 \leq a < 1$.

b. $f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0,1]$.

c. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

d. $f_n(x) = \sin(x)\exp(1-\frac{x}{n})$ sur $[0,2\pi]$.

e. $f_n(x) = \ln(x^4 + nx^2)$ sur $]0,+\infty[$.

f. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^p}$ sur $\mathbb{R}$.