TD 4 : Séries de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions de terme général :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh nx}, \qquad x \geq 1,\ n \in \mathbb{N}.$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n(|x-n|+1)}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n > 0.$
3. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2} \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\Big(1 + \frac{x}{n(1+x)}\Big).$$

Montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 3. Montrer que la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^n}$$

converge uniformément sur l'intervalle $[-1,1]$.

Exercice 4. Soit $I =]1,+\infty[$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

1. Vérifier que f est définie sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.