TD5 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1.

1. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $\| \cdot \|_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ par : pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
   (a) Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$
   (b) En déduire que l'application $\| \cdot \|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
2. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\| \cdot \|_2 : E \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $f \in E$ par :
$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$
   est une norme sur E.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$ les deux normes suivantes :
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$
Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Soient a et b des réels strictement positifs. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$N(x,y) = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}.$$

1. Montrer que N est une norme.
2. Soit $r > 0$. Dessiner la boule de centre 0 et de rayon r.
3. Déterminer le plus petit nombre $C_1 > 0$ tel que
$$N(x,y) \leq C_1 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
   et le plus grand nombre $C_2 > 0$ tel que
$$N(x,y) \geq C_2 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-ils des ouverts ? Sont-ils des fermés ?

1. $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y > 0\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y = 0\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq f(x)\}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et avec f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. **(Résultat à connaître)** Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel E, alors les ouverts de (E, N_1) et de (E, N_2) sont les mêmes et les fermés de (E, N_1) et de (E, N_2) sont les mêmes.

Exercice 6. Soit
$$p \ :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x \in \mathbb{R}.$$
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$.

1. Montrer que p est continue.
2. Montrer que p est ouverte, *i.e.* si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $p(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
3. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p(H)$ n'est pas un fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. On se place dans $\mathbb{R}^2$ munie de la norme infinie.

1. Trouver la limite de la suite
$$u_n = (n \sin(1/n), \exp(1/n) + \exp(-1/n)), \quad n > 0.$$
2. Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin x$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.