TD bonus : Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}.$$

1. Montrer que N est une norme.
2. La comparer à la norme $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E. On définit

$$A+B = \{z \in E : \ \exists x \in A, \ \exists y \in B, \ z = x+y\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A+B$ est ouvert.
2. Montrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées et observer que $A+B$ n'est pas fermée.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrer que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A et que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On munit E de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x)\,dx \end{aligned}$$

est une application continue sur E.

Exercice 5. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Pour tout $f \in E$, soient N_0 et N_1 deux applications définies par :

$$N_0(f) = \sup_{[0,1]} |f|, \qquad N_1(f) = \sup_{[0,1]} |f'|.$$

1. Montrer que N_0 et N_1 sont des normes sur E.
2. Montrer que l'identité de (E, N_1) dans (E, N_0) est continue.
3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite

   $$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que (f_n) converge vers 0 pour la norme N_0 mais pas pour la norme N_1.
4. En déduire que l'identité de (E, N_0) dans (E, N_1) n'est pas continue en 0.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels muni de la norme $N(P) = \sum_i |a_i|$ pour tout $P(X) = \sum_i a_i X^i \in E$. Est-ce que l'application linéaire $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?