

```

1 def Minimize(pos, data, nbsteps=10000, maxcounter=30,
2   earlyabort=0, coeffA = 1.0, coeffB = 1.0, coeffC = 2.0) :
3
4   def T(i) :
5     return (1-i/nbsteps)
6
7   coeffC *= (data.nbc + data.nbl)
8   def P(Efrom, Eto, Ebest, T) :
9     diff = coeffA * (Eto - Ebest) + coeffB * (Eto -
10      Efrom)
11     return exp(-diff / (coeffC*T))
12
13   score = Score(pos)
14   best, bestscore, counter = pos, score, 0
15   lst = [ score ]
16
17   for i in range(nbsteps) :
18     set = randint(0, data.nbl + data.nbc - 1)

```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème de Berlekamp

Clémentine Laurens

10 Novembre 2017

Lycée François Truffaut (Challans, 85)

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

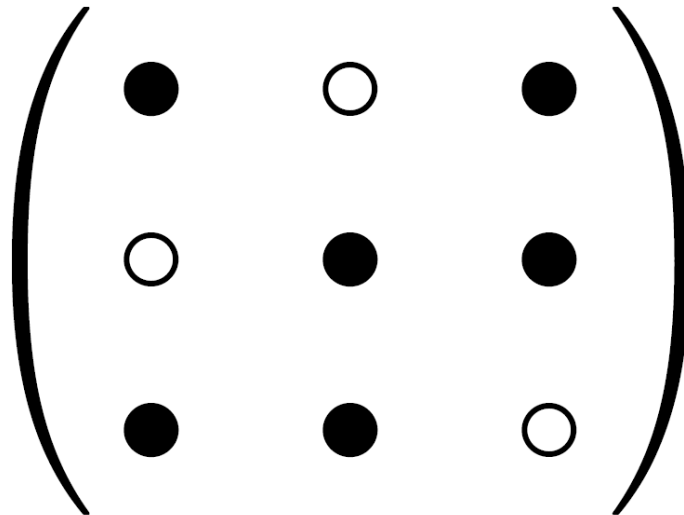
1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.



1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

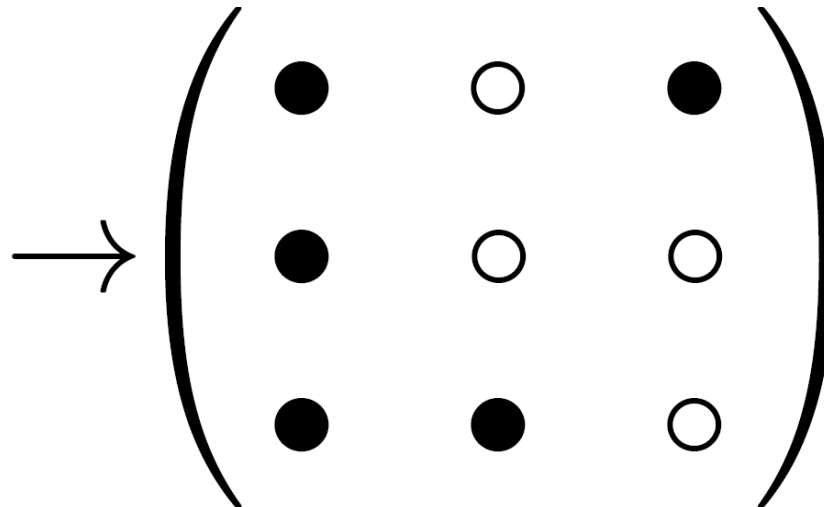
1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.



1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

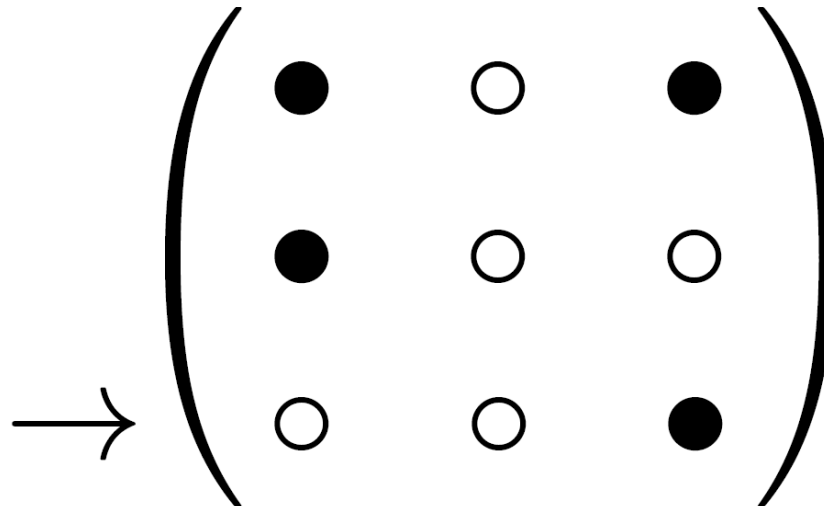
1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.



1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

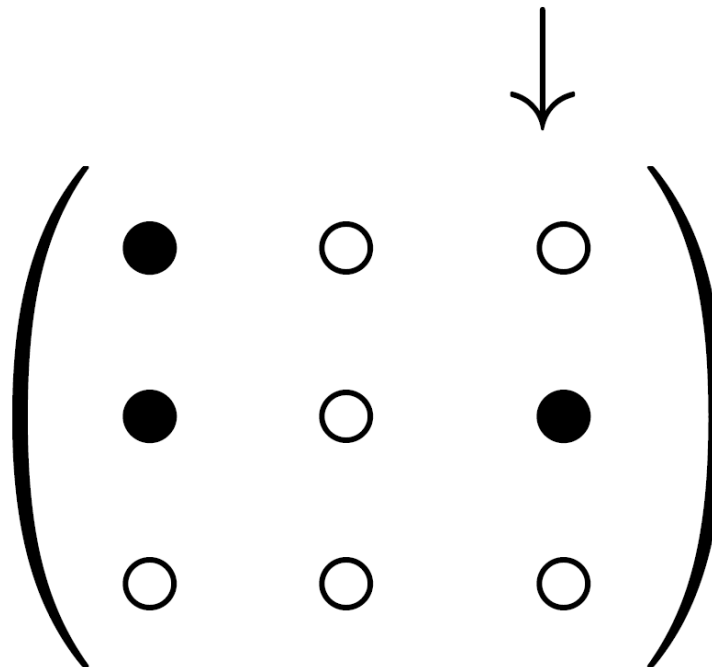
1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.



1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 tableau d'ampoules à n lignes et n colonnes

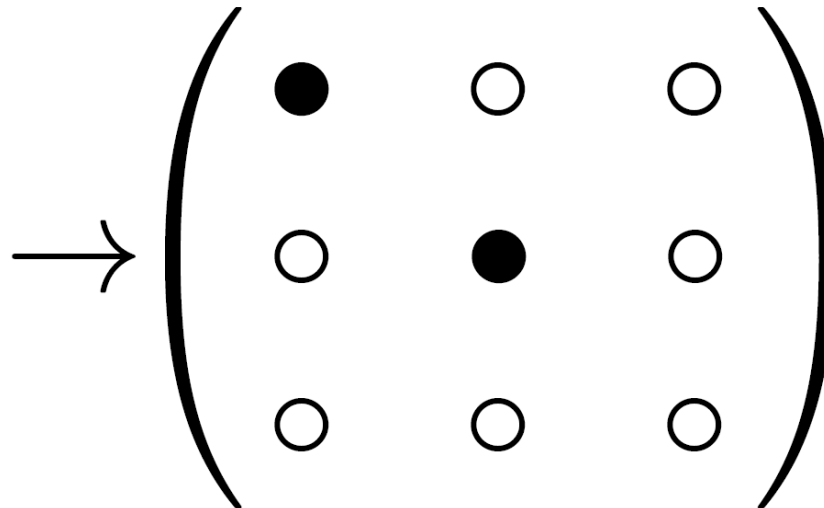
1 interrupteur au bout de chaque ligne et de chaque colonne

Joueur 1

- Cherche à **maximiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Choisit la **configuration initiale**.

Joueur 2

- Cherche à **minimiser** le nombre d'ampoules allumées.
- Peut **actionner les interrupteurs** dans n'importe quel ordre et autant de fois qu'il veut.



1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

Problème 1 (problème intermédiaire).

Configuration de départ quelconque

⇒ Configurations accessibles, à partir de cette configuration de départ, qui minimisent le nombre d'ampoules allumées ?

⇒ Méthode algorithmique de recherche des configurations optimales pour le second joueur, à partir d'une situation de départ donnée.

1 Position du problème : principe du *Berlekamp's Switching Game*

Problème 1 (problème intermédiaire).

Configuration de départ quelconque

⇒ Configurations accessibles, à partir de cette configuration de départ, qui minimisent le nombre d'ampoules allumées ?

⇒ Méthode algorithmique de recherche des configurations optimales pour le second joueur, à partir d'une situation de départ donnée.

Problème 2 (*Problème de Berlekamp*).

Configurations initiales qui maximisent le nombre minimal d'ampoules allumées que peut obtenir le second joueur ?

2 Modélisation mathématique du problème

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 0$$

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 0$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

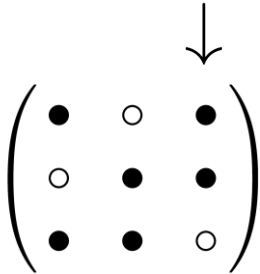
$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »



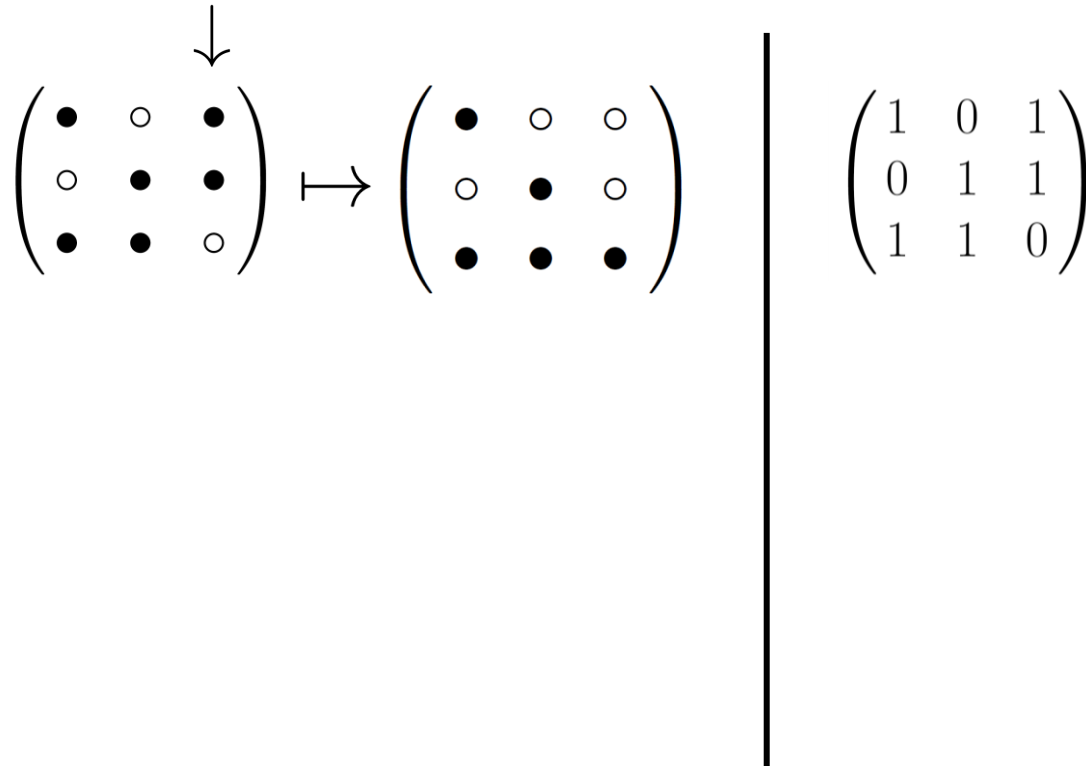
A 3x3 binary matrix with rows [1, 0, 1], [0, 1, 1], and [1, 1, 0]. A vertical line is positioned to the left of the matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

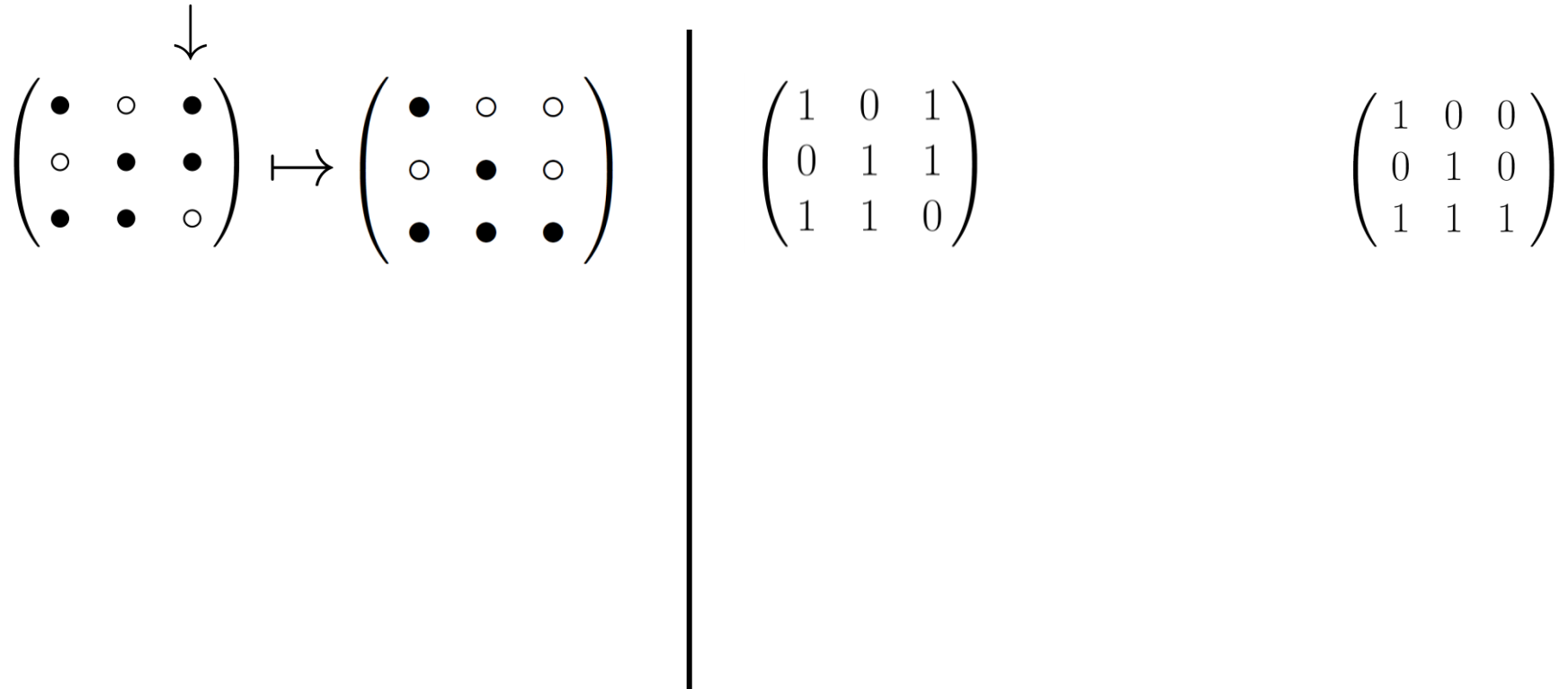
« Matrices binaires »



Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »



Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \xrightarrow{\downarrow} \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{array} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \quad \left| \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \right.$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \right.
 \qquad
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de **modéliser facilement le basculement d'un interrupteur** par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Intérêt : permet de modéliser facilement le basculement d'un interrupteur par le joueur 2

2 Modélisation mathématique du problème

« Matrices binaires »

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \rightarrow \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intérêt : permet de **modéliser facilement le basculement d'un interrupteur** par le joueur 2

ET somme des coefficients = **nombre d'ampoules allumées**

3 Comment « bien classer » les matrices ?

3 Comment « bien classer » les matrices ?

Idée :

Deux tableaux sont « équivalents » si et seulement si le joueur 2 peut passer de l'un à l'autre en manipulant les interrupteurs

3 Comment « bien classer » les matrices ?

Idée :

Deux tableaux sont « équivalents » si et seulement si le joueur 2 peut passer de l'un à l'autre en manipulant les interrupteurs

Formalisation mathématique :

- Famille $\mathcal{C}$ = Ensemble des matrices comportant exactement une ligne ou une colonne de 1, et des 0 partout ailleurs
- Deux matrices binaires sont « équivalentes » si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en ajoutant des matrices de la famille $\mathcal{C}$

3 Comment « bien classer » les matrices ?

Idée :

Deux tableaux sont « équivalents » si et seulement si le joueur 2 peut passer de l'un à l'autre en manipulant les interrupteurs

Formalisation mathématique :

- Famille $\mathcal{C}$ = Ensemble des matrices comportant exactement une ligne ou une colonne de 1, et des 0 partout ailleurs
- Deux matrices binaires sont « équivalentes » si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en ajoutant des matrices de la famille $\mathcal{C}$

Classes d'équivalence :

Si M est une matrice binaire, $\bar{M}$ = « Classe d'équivalence » de M
= Ensemble des matrices binaires équivalentes à M

3 Comment « bien classer » les matrices ?

Idée :

Deux tableaux sont « équivalents » si et seulement si le joueur 2 peut passer de l'un à l'autre en manipulant les interrupteurs

Formalisation mathématique :

- Famille $\mathcal{C}$ = Ensemble des matrices comportant exactement une ligne ou une colonne de 1, et des 0 partout ailleurs
- Deux matrices binaires sont « équivalentes » si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en ajoutant des matrices de la famille $\mathcal{C}$

Classes d'équivalence :

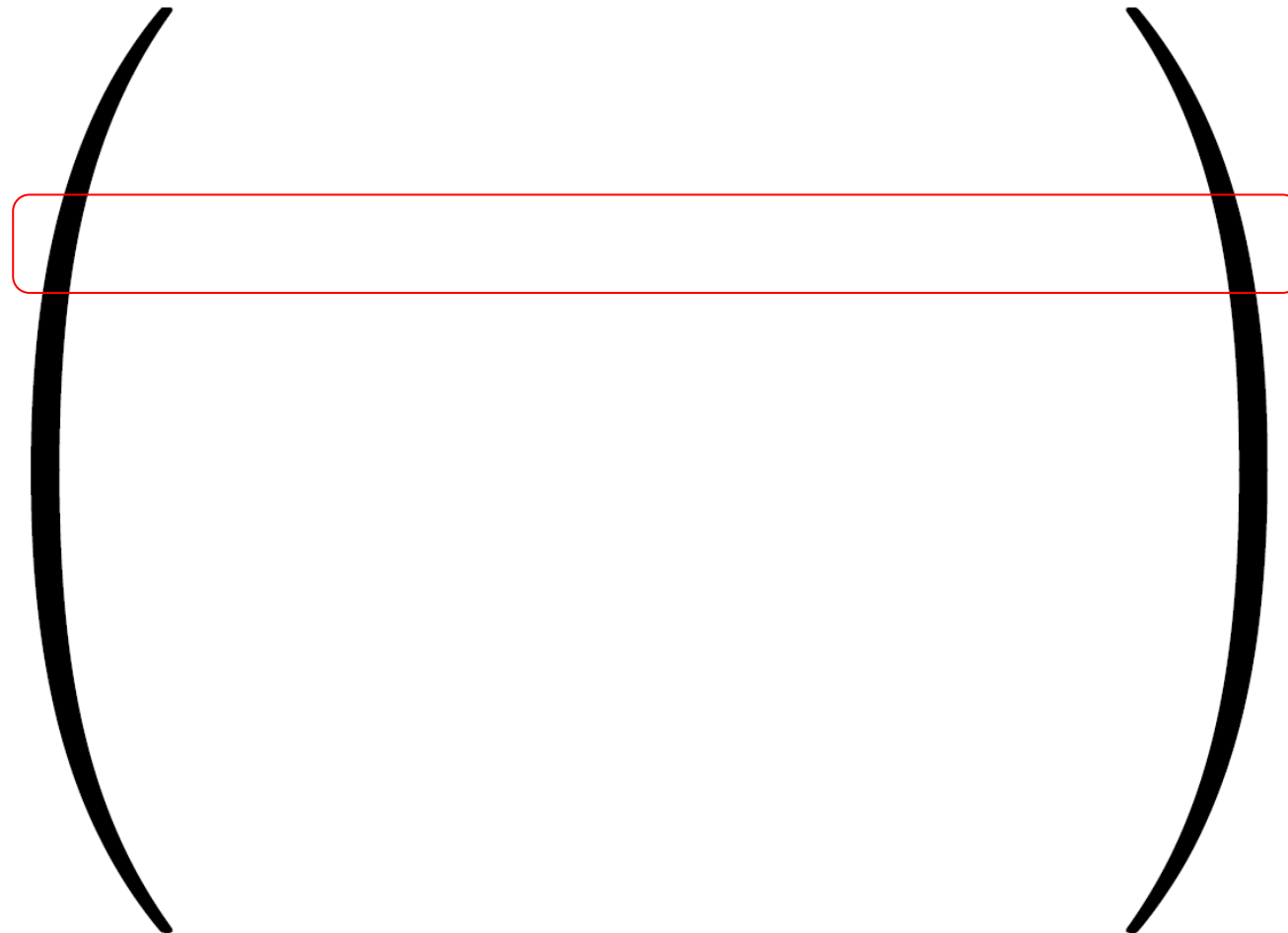
Si M est une matrice binaire, $\bar{M}$ = « Classe d'équivalence » de M
= Ensemble des matrices binaires équivalentes à M

Chef de classe :

Membre d'une classe d'équivalence comportant le moins de 1

4 Une représentation adaptée : le tableau standard

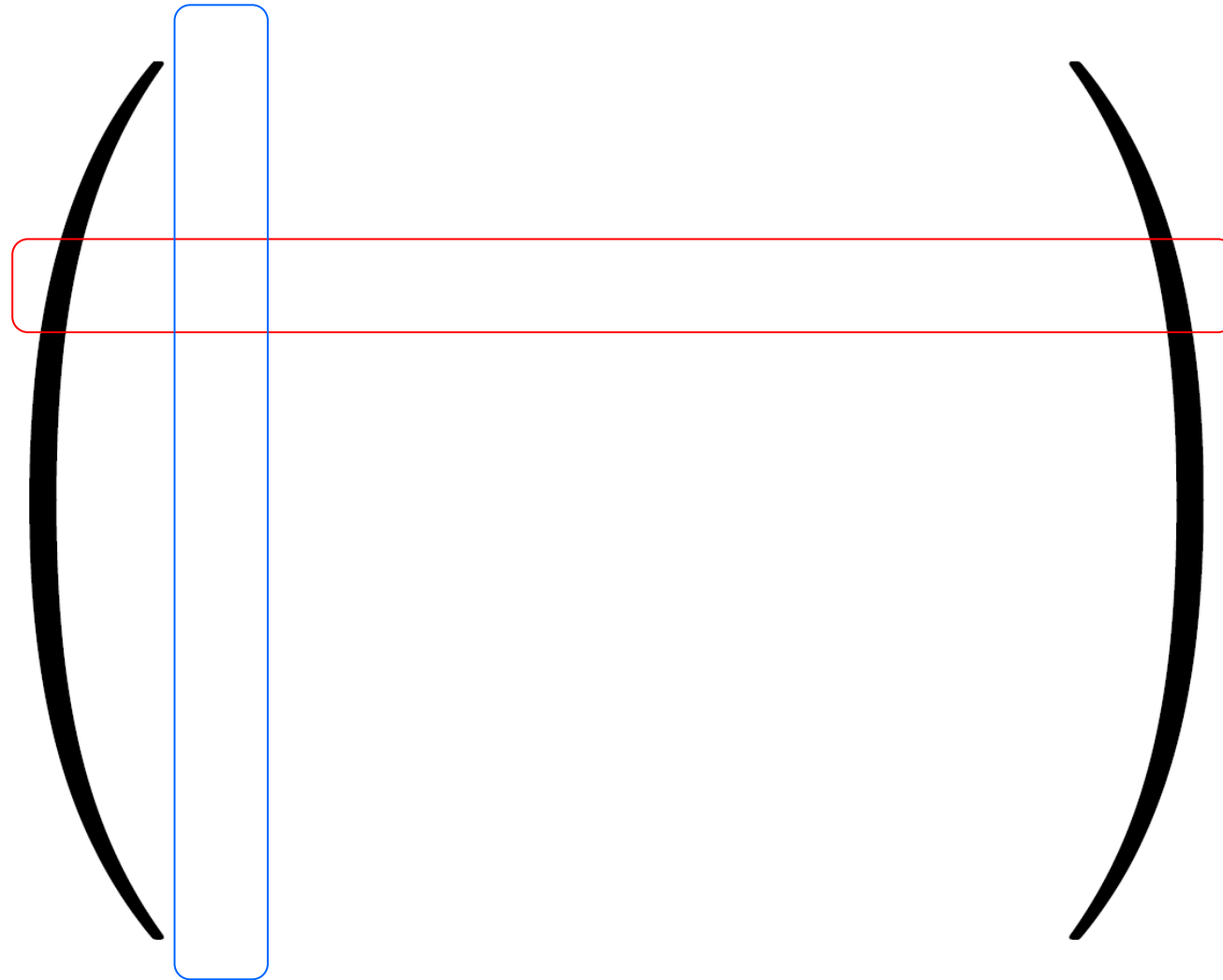
4 Une représentation adaptée : le tableau standard



Lignes
=
Classes
d'équivalences

4 Une représentation adaptée : le tableau standard

1^{ère} colonne
=
Chefs de classe



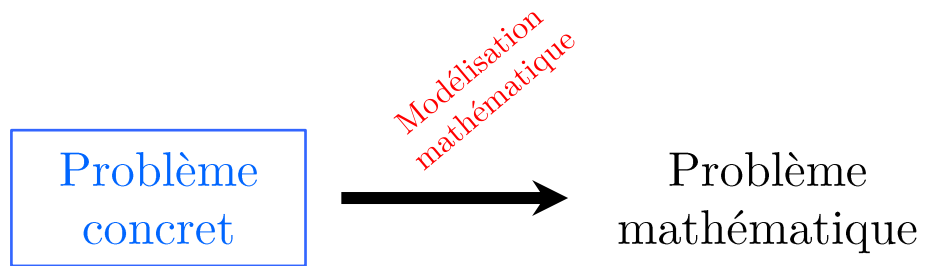
Lignes
=
Classes
d'équivalences

5 Conclusion

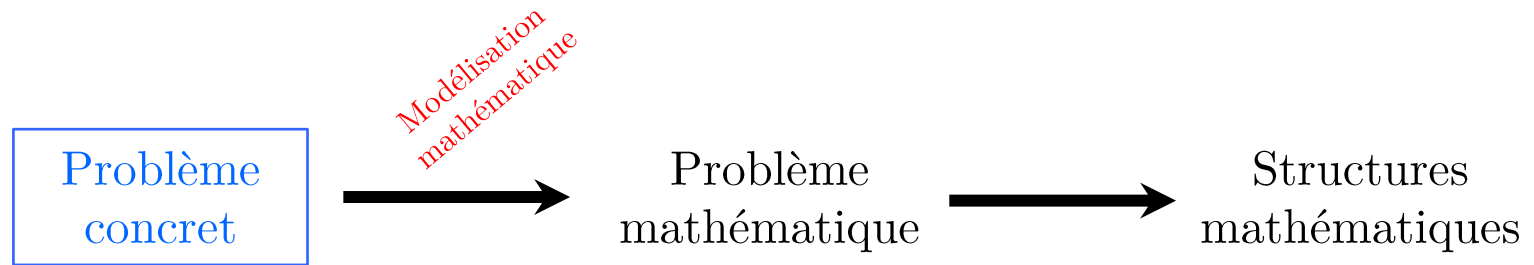
5 Conclusion

Problème
concret

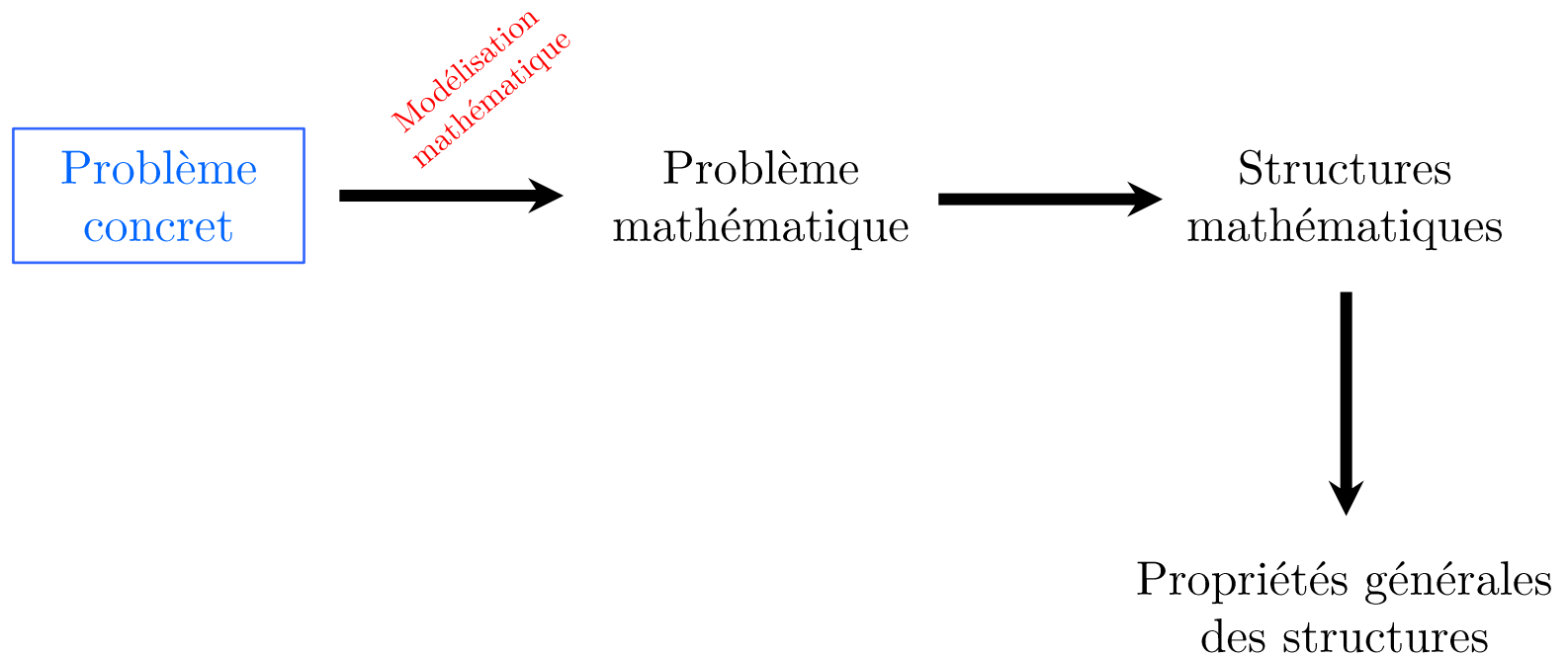
5 Conclusion



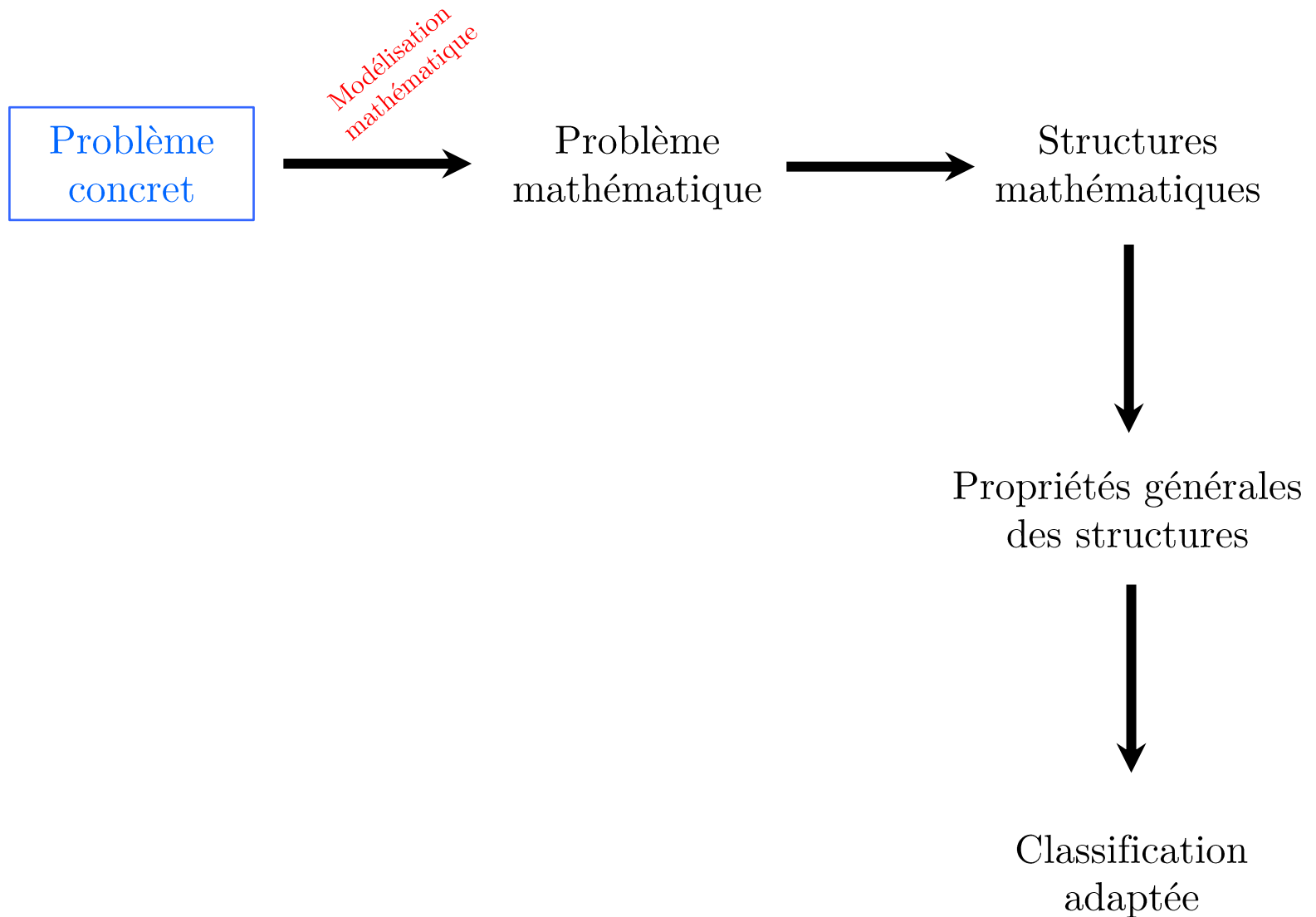
5 Conclusion



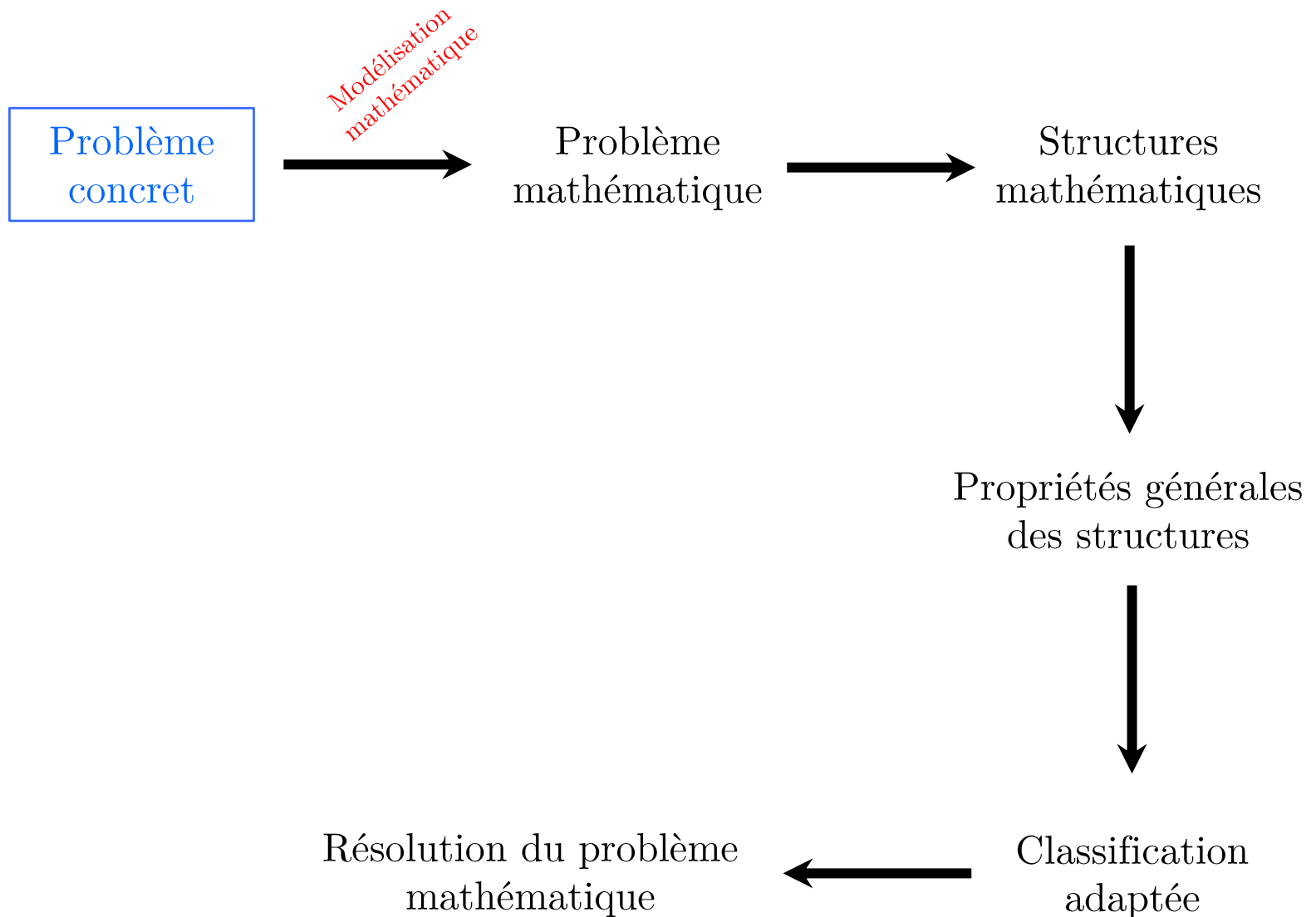
5 Conclusion



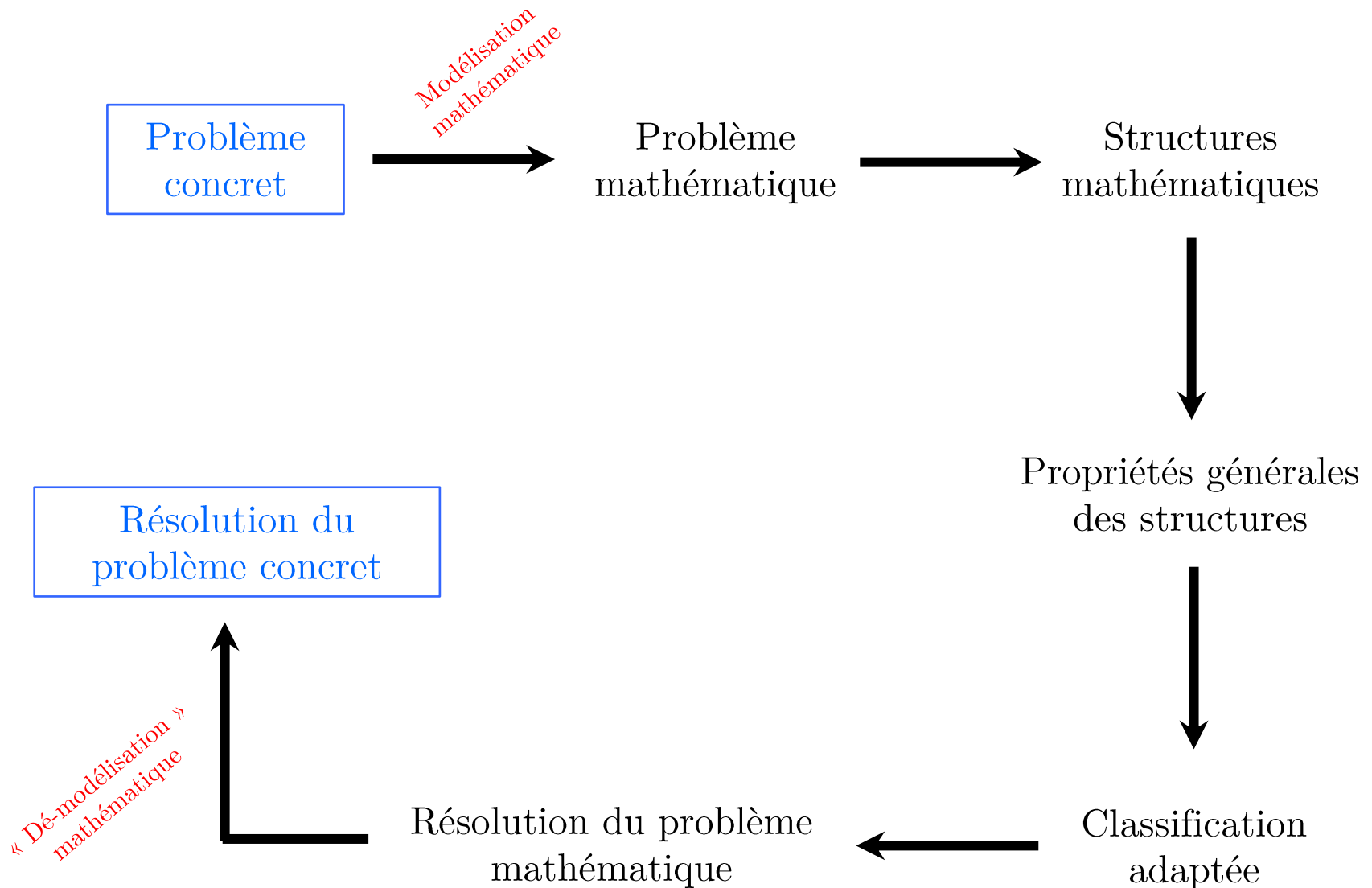
5 Conclusion



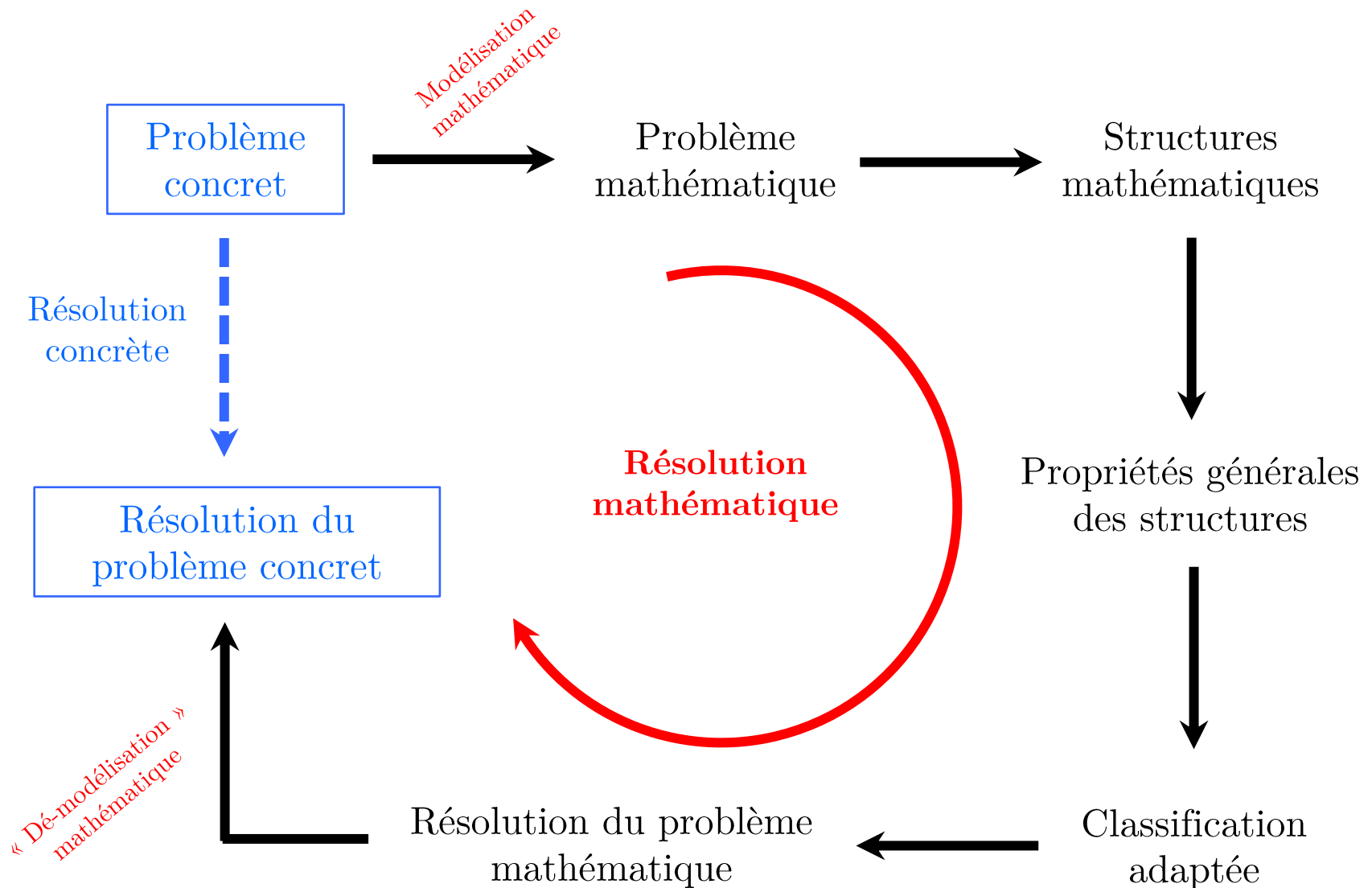
5 Conclusion



5 Conclusion



5 Conclusion



Pour les curieux...

<http://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/clementine.laurens/>

Rubriques « Interventions » et « CPGE - TIPE 2017 »

clementine.laurens@ens-rennes.fr