

L2 - Algèbre linéaire - CC2 2023 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

1 Question de cours

1. (a) On suppose par l'absurde que $\lambda = 0$. Alors il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X = 0_n$. Ainsi

$$X = A^{-1}AX = A^{-1}0_n = 0_n$$

ce qui est absurde. Donc $\lambda \neq 0$.

- (b) Soit X vecteur propre de A associé à λ . Alors $AX = \lambda X$. Ainsi

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda X = \frac{1}{\lambda}A^{-1}AX = \frac{1}{\lambda}X.$$

De plus $X \neq 0_n$ car X est un vecteur propre. Donc X est un vecteur propre de A^{-1} associé à $\frac{1}{\lambda}$.

2. (a) On suppose par l'absurde que f est inversible. Alors $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$. Donc

$$0 = f^n \circ f^{-1} = f^{n-1}.$$

Puis

$$0 = f^{n-1} \circ f^{-1} = f^{n-2}.$$

On en déduit donc, par itérations successives, que $f^k = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. En particulier $f = 0$ ce qui est absurde car f est inversible.

- (b) Le polynôme X^n est annulateur de f . Donc les valeurs propres de f sont comprises dans l'ensemble des racines de X^n égal à $\{0\}$. Ainsi la seule valeur propre de f est 0. En particulier $E_0(f) = \ker(f)$.
3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour tout espace vectoriel E de dimension finie, pour tout $f \in L(E)$, $P_f(f) = 0$.

2 Problème

Partie I

1. Nous avons

$$\begin{aligned} P_f &= P_A \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)[(2-X)(1-X) + 1] + (-1)(-1) - (2-X) \\ &= (1-X)[X^2 - 3X + 3] + X - 1 \\ &= (1-X)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (1-X)(X-1)(X-2) \\ &= (X-1)^2(2-X). \end{aligned}$$

Ainsi P_f est scindé. Donc f est trigonalisable.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_1(f) &\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff z = 0, x = y. \end{aligned}$$

Donc $E_1(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$ est de dimension 1 et $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non nul de cet espace propre.

3. Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$ i.e.

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{cases} z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

i.e. $z = 1$ et $x = y$. Par conséquent le vecteur $v = (1, 1, 1)$ convient.

4. Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} w \in E_2(f) &\iff \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = z, y = 0. \end{aligned}$$

Donc $E_2(f) = \text{Vect}((1, 0, 1))$ et $w = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de f associé à 2.

5. Les vecteurs (u, v) sont libres dans $E_1(f)$ car non colinéaires et $E_1(f) \oplus E_2(f)$. Donc (u, v, w) est une famille libre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de \mathbb{R}^3 . Ainsi (u, v, w) est une base de \mathbb{R}^3 .

6. Nous avons

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

car $f(u) = u, f(v) = u + v, f(w) = 2w$.

7. Nous avons

$$\begin{aligned} f^2(v) &= f(u) + f(v) = u + u + v = 2u + v, \\ f^3(v) &= 2f(u) + f(v) = 3u + v. \end{aligned}$$

Donc, par itérations successives, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k(v) = ku + v.$$

8. Nous avons donc

$$T^k = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

car $f^k(u) = 1^k u = u, f^k(v) = ku + v, f^k(w) = 2^k w$.

9. Nous avons donc, par formule de changement de bases,

$$A = PTP^{-1}$$

avec

$$P = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = PT^kP^{-1}$$

avec T^k obtenue à la question précédente et P^{-1} par inversion de P par la méthode du pivot de Gauss ou la formule $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \text{Com}(P)^T$.

Partie II

1. Nous avons

$$\begin{aligned} P_B &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + XL_1}{=} \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ 1-X & 1-X & 0 \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 1-X \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X \end{vmatrix} \\ &= (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+(1+m)X-X^2 & m-1+(1+m)X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(m-1+(1+m)X - m - (1+m)X + X^2) \\ &= (1-X)(X^2-1) \\ &= -(1-X)^2(1+X). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de B sont les racines -1 et 1 de P_B .

2. Déterminons $E_1(B)$ en fonction de m . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} X \in E_1(B) &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (m+1)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} mx + my = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc si $m = 0$ alors $E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est de dimension 2. Ainsi $\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Ainsi B est diagonalisable. Sinon $m \neq 0$ et dans ce cas

$$X \in E_1(B) \iff x = -y = z,$$

d'où $E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est de dimension 1 et B n'est pas diagonalisable.

3. On sait que $m_B \mid P_B$ et que les valeurs propres -1 et 1 sont racines de m_B . Ainsi nous avons deux possibilités :

- Soit $m_B = (X-1)(X+1)$. Dans ce cas m_B est scindé à racines simples. Donc B est diagonalisable. Ainsi, d'après la question précédente, $m = 0$.
- Soit $m_B = (X-1)^2(X+1)$. Dans ce cas m_B n'est pas scindé à racines simples. Donc B n'est pas diagonalisable. Ainsi, d'après la question précédente, $m \neq 0$.

Par conséquent, par contraposée,

- Si $m \neq 0$ alors $m_B = (X-1)^2(X+1)$.
- Si $m = 0$ alors $m_B = (X-1)(X+1)$.