Algèbre linéaire 2 - DM 2 - Correction

D Cacitti

2024-2025

On considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F dimensions finies n, p.

Question 1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_p)$ une base de F. Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ où

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i.$$

Question 2. Nous avons alors

$$\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_E\} = \{x \in E,\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\underbrace{M_{\mathcal{B}}(x)}_{=X} = 0_p\} = \{x \in E,\ X = M_{\mathcal{B}}(x) \in \ker(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))\}.$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$,

$$x \in \ker(f) \quad \Longleftrightarrow \quad X = M_{\mathcal{B}}(x) \in \ker(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)).$$

Question 3. On considère une base $\mathcal{B}'$ de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$

Autrement dit les colonnes de P sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

Question 4. Avec b, b' deux bases de E, nous avons, pour tout $u \in E$,

$$X' = M_{b'}(u) = M_{b,b'}(\mathrm{id}_E)M_b(u) = M_{b,b'}(\mathrm{id}_E)X.$$

Question 5. On considère $\mathcal{C}'$ une base de F. Alors la formule de changement de bases est

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E)M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E).$$

En effet nous avons $f = \mathrm{id}_E \circ f \circ \mathrm{id}_E$ et on conclut grâce à la matrice d'une composée d'applications linéaires.

Question 6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on dit que A et B sont équivalentes s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBQ.$$

Et on dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}.$$

En particulier semblables implique équivalentes en prenant $Q = P^{-1}$.

Question 7. ~~Qu'est-ce qu'une permutation ? Une transposition ? Le groupe symétrique ?~~

Question 8. ~~Pour quelle loi l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est-il un groupe ? Le démontrer.~~

Question 9. ~~Montrer de quel cardinal est le groupe symétrique.~~

Question 10. ~~Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée de transpositions.~~

Question 11. ~~Donner la définition de la signature d'une permutation.~~

Question 12. ~~Quelles sont les signatures des permutations~~ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ~~et~~ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Question 13. On définit le déterminant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $a \in \mathbb{K}, \det((a)) = a$.
- On suppose que le déterminant est défini pour les matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{K})$, on définit son déterminant par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\overline{A}_{1j})$$

  où, pour tout $j \in \{1, ..., n+1\}, \overline{A}_{1j} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est la matrice A sans sa première ligne et sans sa j-ième colonne.

Question 14. *Peu important*
Méthode simple indirect : On suppose que l'on a démontré précédemment le développement par rapport à n'importe quelle colonne. Soient $j \in \{1, ..., n\}, \lambda \in \mathbb{K}$ et $C_1, ..., C_n, C \in \mathbb{K}^n$. On note $(C_1, ..., C_n) = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors on développe par rapport à la j-ième colonne.

$$\begin{aligned}
& \det((C_1, ..., C_{j-1}, \lambda C_j + C, C_{j+1}, ..., C_{n+1})) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\lambda c_{ij} + c_i) \det(\overline{(C_1, ..., C_{j-1}, \lambda C_j + C, C_{j+1}, ..., C_n)_{ij}}) \\
= \; & \lambda \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} \det(\underbrace{\overline{(C_1, ..., C_{j-1}, \lambda C_j + C, C_{j+1}, ..., C_n)_{ij}}}_{=\overline{(C_1, ..., C_{j=1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)}_{ij}}) \\
& + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} c_i \det(\underbrace{\overline{(C_1, ..., C_{j-1}, \lambda C_j + C, C_{j+1}, ..., C_n)_{ij}}}_{=\overline{(C_1, ..., C_{j=1}, C, C_{j+1}, ..., C_n)}_{ij}}) \\
= \; & \lambda \det((C_1, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)) + \det((C_1, ..., C_{j-1}, C, C_{j+1}, ..., C_n)).
\end{aligned}$$

Méthode compliquée directe : On sert de la définition du déterminant par récurrence et par développement selon la première ligne. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $\lambda, a, b \in \mathbb{K}$,

$$\det((\lambda a + b)) = \lambda a + b = \lambda \det((a)) + \det((b)).$$

- On suppose que l'application déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne pour les matrices carrées de taille n. Soient $i \in \{1, ..., n+1\}, \lambda \in \mathbb{K}$ et $C_1, ..., C_{n+1}, C \in \mathbb{K}^{n+1}$. On note $(C_1, ..., C_n) = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$. Alors, par définition du déterminant par développement selon la première ligne,

$$\begin{aligned}
& \det((C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i + C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})) \\
= & \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \underbrace{(C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i + C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})_{1j}}_{=\left\{\begin{array}{rl} c_{1j} & \text{si} \quad j \neq i \\ \lambda c_{1j} + c_1 & \text{si} \quad j = i \end{array}\right.} \det(\overline{(C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i + C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})}_{1j}) \\
= & \sum_{j=1, j\neq i}^{n+1} (-1)^{1+j} c_{1j} \underbrace{\det(\overline{(C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i + C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})}_{1j})}_{=\lambda \det(\overline{C}_{1j}) + \det(\overline{(C_1, ..., C_{i-1}, C, C_{i+1}, ..., C_n)}_{1j})} \\
& + (-1)^{1+i} (\lambda c_{1i} + c_1) \det(\underbrace{\overline{(C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i + C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})}_{1i}}_{=\overline{C}_{1i} = \overline{(C_1, ..., C_{i-1}, C, C_{i+1}, ..., C_{n+1})}_{1i}}) \\
= & \lambda \sum_{j=1, j\neq i}^{n+1} (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\overline{C}_{1j}) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n+1} (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\overline{C_1, ..., C_{i-1}, C, C_{i+1}, ..., C_{n+1}}_{1j}) \\
& + \lambda (-1)^{1+i} c_{1i} \det(\overline{C}_{1i}) + (-1)^{1+i} c_1 \det(\overline{(C_1, ..., C_{i-1}, C, C_{i+1}, ..., C_n)} \\
= & \lambda \det((C_1, ..., C_n)) + \det((C_1, ..., C_{i-1}, C, C_{i+1}, ..., C_n)).
\end{aligned}$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

Question 15. *Peu important*
On commence par montrer la question suivante. Nous allons nous en servir. En effet on considère $A = (C_1, ..., C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $i, j \in \{1, ..., n\}$ distincts tels que $C_i = C_j$. Alors, par échange des colonnes C_i et C_j on obtient d'après la question suivante $\det(A) = -\det(\widetilde{A})$ avec $\widetilde{A} = A$ obtenue en échangeant les colonnes C_i et C_j identiques. Donc

$$\det(A) = -\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$$

i.e. $\det(A) = 0$.

Question 16. *Peu important*
On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

- Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Alors, en notant $\widetilde{A}$ la matrice obtenue en échangeant les colonnes de A, nous obtenons
$$\det(\widetilde{A}) = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -\det(A).$$
- On suppose le résultat vrai au rang $n \geq 2$. Soient $A = (C_1, ..., C_n) \in \mathcal{M}_{n+1,n+1}(\mathbb{K})$ et $i_0, j_0 \in \{1, ..., n+1\}$ distincts qu'on suppose vérifier $i_0 < j_0$ quitte à les échanger. On note $\widetilde{A}$ la matrice obtenue en échangeant les i_0-ème et j_0-ième colonnes Alors, pour tout $j \in \{1, ..., n+1\}$, si $j \neq i_0, j_0$ alors $\overline{\widetilde{A}}_{1,j}$ est obtenu en échangeant les colonnes i_0 et j_0, d'où, par hypothèse de récurrence,
$$\det(\overline{\widetilde{A}}_{1,j}) = -\det(\overline{A}_{1j}).$$
Puis
$$\overline{\widetilde{A}}_{1,i_0} = \overline{(C_1, ..., C_{j_0}, ...C_{i_0}, ..., C_n)}_{1,i_0} = (C_1^{(1)}, ..., C_{i_0-1}^{(1)}, C_{i_0+1}^{(1)}, ..., C_{j_0-1}^{(1)}, C_{i_0}^{(1)}, C_{j_0+1}^{(1)}, ..., C_n^{(1)})$$
où l'on note $C_i^{(1)} \in \mathbb{K}^n$ la i-ième colonne de A sans le premier cœfficient. Alors pour replacer $C_{i_0}^{(1)}$ à sa place en i_0i-ème colonne il faut effectuer les opérations successives
$$C_{i_0}^{(1)} \longleftrightarrow C_{j_0-1}^{(1)}, \quad C_{i_0}^{(1)} \longleftrightarrow C_{j_0-2}^{(1)}, \quad ..., \quad C_{i_0}^{(1)} \longleftrightarrow C_{i_0-1}^{(1)}.$$
En particulier il faut effectuer $j_0 - i_0 - 1$ permutations de colonnes, donc par hypthèse de récurrence,
$$\det(\overline{\widetilde{A}}_{1,i_0}) = (-1)^{j_0-i_0-1} \det(\overline{A}_{1,j_0}).$$

De même

$$\det(\overline{\widetilde{A}}_{1,j_0}) = (-1)^{j_0-i_0-1}\det(\overline{A}_{1,i_0}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \det(\widetilde{A}) \\
= \; & \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\overline{\widetilde{A}}_{1j}) \\
= \; & \sum_{j=1, j\neq i_0,j_0}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\overline{\widetilde{A}}_{1j}) + (-1)^{1+i_0}\det(\overline{\widetilde{A}}_{1i_0}) + (-1)^{1+j_0}\det(\overline{\widetilde{A}}_{1j_0}) \\
= \; & -\sum_{j=1, j\neq i_0,j_0}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\overline{A}_{1j}) \\
& + \underbrace{(-1)^{1+i_0}(-1)^{j_0-i_0-1}}_{=-(-1)^{1+j_0}}\det(\overline{A}_{1j_0}) + \underbrace{(-1)^{1+j_0}(-1)^{j_0-i_0-1}}_{=-(-1)^{1+i_0}}\det(\overline{A}_{1i_0}) \\
= \; & -\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(\overline{A}_{1j}) \\
= \; & -\det(A).
\end{aligned}$$

Le théorème de récurrence permet de conclure.

Question 17. On considère une famille de vecteurs $(u_1, ..., u_n) \in E^n$ et $C_i = M_{\mathcal{B}}(u_i) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Alors cette famille est une base si et seulement si $\det((C_1, ..., C_n)) \neq 0$. Pour le montrer on procède par double implications.

- On suppose que la famille $(u_1, ..., u_n)$ est une base. Alors la matrice $(C_1, ..., C_n)$ est de rang n donc est inversible. Ainsi, d'après la question 24,

$$\det((C_1, ..., C_n)) \neq 0.$$

- On suppose que la famille $(u_1, ..., u_n)$ n'est pas une base. Alors, comme il s'agit d'une famille de n vecteurs, elle n'est ni libre, ni génératrice. En particulier il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = 0_E$$

i.e., en passant à la matrice colonne selon la base $\mathcal{B}$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_i = 0_n.$$

Ainsi il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Donc

$$C_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{i=1, i\neq i_0}^{n}\lambda_i C_i.$$

Ainsi on peut effectuer l'opération $C_{i_0} \longleftarrow C_{i_0} + \dfrac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{i=1,i\neq i_0}^{n}\lambda C_i$ pour obtenir, d'après la question 19,

$$\det((C_1, ..., C_n)) = \det((C_1, ..., C_{i_0-1}, 0_n, C_{i_0+1}, ..., C_n) = 0$$

où la dernière égalité est justifiée par linéarité du déterminant selon la i_0-ième colonne.

Question 18. L'endomorphisme $f : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme si et seulement si

$$\det(f) = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) \neq 0.$$

Pour le montrer on utilise le fait que f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une base de E où l'on note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Or, d'après la question précédente, si l'on note $C_i = f(e_i) \in \mathbb{K}^n$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, alors la famille $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une base de E si et seulement $\det((C_1, ..., C_n)) \neq 0$. Donc on obtient que f est un isomorphisme si et seulement si

$$\det(f) = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) = \det((C_1, ..., C_n)) \neq 0.$$

Question 19. Le déterminant est inchangé par ajout d'une combinaison linéaire d'autres colonnes à une colonne. Pour le montrer on considère $C_1, ..., C_n \in \mathbb{K}^n, i \in \{1, ..., n\}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors, par linéarité du déterminant selon la i-ième colonne,

$$\det\left(\left(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + \sum_{j=1, j\neq i} \lambda_j C_j, C_{i+1}, ..., C_n\right)\right)$$

$$= \det((C_1, ..., C_n)) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_j \det((C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_n)).$$

Or, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $j \neq i$, nous avons

$$\det((C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_n)) = 0$$

car il y a deux colonnes C_j dans cette matrice. Donc

$$\det\left(\left(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + \sum_{j=1, j\neq i} \lambda_j C_j, C_{i+1}, ..., C_n\right)\right) = \det((C_1, ..., C_n)).$$

Question 20. Si l'on considère $C_1, ..., C_n \in \mathbb{K}^n, i \in \{1, ..., n\}, i \in \{1, ..., n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors, par linéarité selon la i-ième colonne,

$$\det((C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, ..., C_n) = \lambda \det((C_1, ..., C_n)).$$

Question 21. ~~Quelle est la formule du déterminant à l'aide du groupe symétrique ?~~

Question 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A^T) = \det(A)$.

Question 23. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Question 24. ~~Montrer qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, et donner dans ce cas le déterminant de l'inverse de la matrice.~~ On procède par double implications.

- On suppose que A est inversible. Alors $AA^{-1} = I_n$. Donc, d'après la question précédente,

  $$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

  Ainsi $\det(A)$ est non nul et $(\det(A))^{-1} = \det(A^{-1})$.

- Réciproquement on suppose que $\det(A) \neq 0$. Alors, d'après la question 17, la famille $(C_1, ..., C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi si on note $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C} = (C_1, ..., C_n)$. Alors

  $$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad C_i = Ae_i.$$

  Donc A envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{C}$, donc est un isomorphisme.

Dans ce cas, d'après le premier point, nous avons $(\det(A))^{-1} = \det(A^{-1})$.

Question 25. On dit que $f : E \longrightarrow E$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

Question 26. Montrer qu'une symétrie est un endomorphisme diagonalisable. On considère une symétrie $s : E \longrightarrow E$. Alors $F = \ker(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \ker(s + \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$. On considère une base $(u_1, ..., u_r)$ de F et une base $(u_{r+1}, ..., u_n)$ de G. En particulier

$$\forall i \in \{1, ..., r\}, \quad s(u_i) = u_i, \quad \forall j \in \{r+1, ..., n\}, \quad s(u_j) = -u_j.$$

Alors $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ est une base de E et

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

est diagonale.

Question 27. On dit que $v \in E$ est un vecteur propre de f si $v \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$. De même on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $v \in E$ tel que $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$. Dans ce cas on dit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Question 28. Nous avons par formule de changement de bases et formule du déterminant d'un produit de matrices et de l'inverse d'une matrice,

$$\det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)) = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)) \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)) \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E))^{-1} = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)).$$

Question 29. Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme on peut calculer son polynôme caractéristique $P_f = \det(f - X\mathrm{id}_E)$, dans ce cas les valeurs propres de f sont exactement les racines de P_f. On peut également chercher les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\det(f - X\mathrm{id}_E) = 0$ ou encore tels que $\ker(f - X\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$.

Question 30. Pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f, on cherche une base des sous-espaces propres $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\mathrm{id}_E)$.

Question 31. Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Le polynôme caractéristique de f est $P_f = \det(f - X\mathrm{id}_E)$. Autrement dit, pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E et $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$,

$$P_f = \det(A - XI_n) = P_A.$$

Question 32. Nous avons $\deg(P_f) = n$.

Question 33. On procède par double implications.

- On suppose que f est diagonalisable. Alors il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}, f(u_i) = \lambda u_i$. De plus les u_i sont non nuls car forment une famille libre. Donc les u_i sont des vecteurs propres de f.

- Réciproquement on suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(u_i) = \lambda_i u_i$. Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

  Donc f est diagonalisable.

Question 34. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de f. Alors le sous-espace propre de f associé à la valeur λ est

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda\mathrm{id}_E).$$

Question 35. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ les valeurs propres distinctes de f. On procède par récurrence sur $k \in \{1, ..., r\}$.

- Pour $k = 1$ il n'y a rien à faire.

- On peut faire pour $k = 2$ pour comprendre ce qu'il se passse. Soient $u_1 \in E_{\lambda_1}(f)$ et $u_2 \in E_{\lambda_2}(f)$ tels que

$$u_1 + u_2 = 0_E.$$

  Donc

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) = f(0_E) = 0_E.$$

  Or nous avons également

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_2 = \lambda_1(u_1 + u_2) = \lambda_1 0_E = 0_E.$$

  Donc par soustraction des deux égalités précédentes

$$(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 - (\lambda_1 u_1 + \lambda_1 u_3) = 0_E - 0_E = 0_E.$$

  Or $\lambda_2 \neq \lambda_1$, donc $u_2 = 0_E$. Par conséquent $u_1 = u_1 + u_2 = 0_E$. Ainsi $E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$.

- On suppose le résultat vrai au rang $k \in \{2, ..., r-1\}$. Soient $u_1 \in E_{\lambda_1}(f), ..., u_{k+1} \in E_{\lambda_r}(f)$ tels que
$$u_1 + ... + u_{k+1} = 0_E.$$
Alors
$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_{k+1} u_{k+1} = f(u_1) + ... + f(u_{k+1}) = f(u_1 + ... + u_{k+1}) = f(0_E) = 0_E.$$
De même
$$\lambda_{k+1} u_1 + ... + \lambda_{k+1} u_{k+1} = \lambda_{k+1}(u_1 + ... + u_{k+1}) = \lambda_{k+1} 0_E = 0_E.$$
Donc, par soustraction des deux égalités précédentes,
$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})u_1 + ... + (\lambda_k - \lambda_{k+1})u_k = 0_E.$$
Or, par hypothèse de récurrence, $E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_k}(f)$, donc
$$(\lambda_1 - \lambda_{k+1})u_1 = ... = (\lambda_k - \lambda_{k+1})u_k = 0_E.$$
Or les $\lambda_i, 1 \leq i \leq k$, sont tous distincts de λ_{k+1}, donc
$$u_1 = ... = u_k = 0_E.$$
On en déduit que
$$u_{k+1} = u_1 + ... + u_k + u_{k+1} = 0_E.$$
Ainsi $E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_{k+1}}(f)$.

Question 36. On procède par implications cycliques.

- On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeur propres distinctes de l'endomorphisme f. Alors il existe une base
$$(u_1^1, ..., u_{n_1}^1, u_1^2, ..., u_{n_2}^2, ..., u_{n_r}^r, ..., u_{n_r}^r)$$
de l'espace E composée de vecteurs propres de l'endomorphisme f où l'on a noté, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $u_1^i, ..., u_{n_i}^i$ les vecteurs propres associées à la valeur propre λ_i. Alors nous avons $n = n_1 + ... + n_r$ et, comme, pour tout $i \in \{1, ..., r\}, (u_1^i, ..., u_{r_i}^i)$ est une famille libre (car extrait d'une base) du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$, nous avons aussi $n_i \leq \dim(E_{\lambda_i}(f))$. Or nous avons également que
$$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) \subset E.$$
Par conséquent
$$n = n_1 + ... + n_r \leq \dim(E_{\lambda_1}(f)) + ... + \dim(E_{\lambda_r}(f)) = \dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f)) \leq \dim(E) = n.$$
Donc toutes les inégalités sont en fait des égalités. En particulier $\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f)) = \dim(E)$ et ainsi les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E
$$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = E.$$
- On suppose que
$$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = E.$$
Alors
$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E).$$
- On suppose que
$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E).$$
Or les sous-espaces propres sont déjà en somme directe, donc ils sont supplémentaires dans E :
$$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = E.$$
Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on considère une base $(u_1^i, ..., u_{n_1}^i)$ du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ où l'on note $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(f))$. Alors, par concaténation, la famille $(u_1^1, ..., u_{n_1}^1, ..., u_1^r, ..., u_{n_r}^r)$ est une famille libre de $n_1 + ... + n_r = \dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r})(f)) = \dim(E)$ vecteurs. Donc il s'agit d'une base de l'espace E composée de vecteurs propres de l'endomorphisme f. Ainsi l'endomorphisme f est diagonalisable.

Question 37. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $u_i \in E_{\lambda_i}(f)$ non nul. Or les $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe, donc la famille $(u_1, ..., u_n)$ est une famille libre de n vecteurs propres, donc est une base de E composée de vecteurs propres de f. Donc f est diagonalisable.

Question 38. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ? Si oui le démontrer. Si non donner un contre-exemple. La réciproque est fausse en général. Par exemple si $f = 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ alors $P_f = (3 - X)^3$. Donc f admet uniquement 3 comme valeur propre. f admet donc 1 valeur propre alors que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Pourtant f est diagonalisable car dans la base canonique sa matrice est $3I_2$ qui est diagonale.

Question 39. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On procède par double implications.

- On suppose que λ est valeur propre de f. Ainsi il existe $v \in E$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$ i.e. $(f - \lambda\mathrm{id}_E)(u) = 0_E$. Donc $f - \lambda\mathrm{id}_E$ n'est pas injective donc pas bijective. Ainsi

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda\mathrm{id}_E) = 0.$$

  Donc λ est racine de P_f.

- Réciproquement on suppose que λ est racine de P_f. Alors $\det(f - \lambda\mathrm{id}_E) = P_f(\lambda) = 0$. Ainsi $f - \lambda\mathrm{id}_E$ est non bijective, donc non injective. Donc il existe $v \in E$ non nul tel que $(f - \lambda\mathrm{id}_E)(v) = 0_E$ i.e. $f(v) = \lambda v$. Donc λ est une valeur propre de f.

Question 40. Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que les multiplicités des racines λ_i sont égales aux dimensions des sous-espaces propres E_{λ_i}. On procède par double implications.

- On suppose que f est diagonalisable. Alors $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f)$. Donc, en prenant une base $\mathcal{B}_1$ de $E_{\lambda_1}(f)$, ..., une base $\mathcal{B}_r$ de $E_{\lambda_r}(f)$, nous obtenons par concaténation une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \wedge ... \wedge \mathcal{B}_r$ de E. Ainsi

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}$$

  où $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(f)), 1 \leq i \leq r$. Ainsi

$$P_f = P_{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)} = (\lambda_1 - X)^{n_1} ... (\lambda_r - X)^{n_r}.$$

  Donc P_f est scindé et les multiplicités des racines λ_i sont égales aux n_i.

- Réciproquement on suppose que P_f est scindé et les multiplicités des racines λ_i sont égales aux n_i :

$$P_f = (\lambda_1 - X)^{n_1} ... (\lambda_r - X)^{n_r}.$$

  Alors

$$\dim(E) = n = \deg(P_f) = n_1 + ... + n_r = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + ... + \dim(E_{\lambda_r}(f).$$

  Or les $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe, donc ils sont supplémentaires dans E. Donc f est diagonalisable.