

**Exercice.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un ensemble à  $n$  éléments et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ .

1. Déterminer le nombre  $a$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \subset B$ .
2. Déterminer le nombre  $b$  de couples  $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .
3. Déterminer le nombre  $c$  de triples  $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$  tels que  $A, B$  et  $C$  soient deux à deux disjoints et vérifient  $A \cup B \cup C = E$ .

**Réponse.**

1. Nous avons

$$\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B\} = \bigsqcup_{k=0}^n \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B, |B| = k\}.$$

Donc

$$a = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n.$$

2. Nous avons

$$\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B^c\} = \{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset C\}.$$

Donc  $b = a = 3^n$ .

3. Nous avons

$$\begin{aligned} \{(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset, E = A \cup B \cup C\} \\ = \{(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, A \cap B = \emptyset, C = (A \cup B)^c\}. \end{aligned}$$

Donc  $c = b = 3^n$ .

**Exercice.** On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi binomiale de paramètres  $n, p$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, 1]$ .

1. Montrer que, pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

2. Que peut-on dire si  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

3. Interpréter.

**Réponse.**

1. Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors, en utilisant l'inégalité de Markov et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}(|X - np| \geq n\varepsilon) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(|X - np|)}{n\varepsilon} \\ &\leq \frac{\sqrt{\mathbb{E}((X - np)^2)}}{n\varepsilon} = \frac{\sqrt{V(X)}}{n\varepsilon} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n\varepsilon} \\ &= \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\varepsilon}. \end{aligned}$$

2. Nous avons alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Par conséquent  $\frac{X}{n}$  a une probabilité de plus en plus proche de 1 d'être à une distance au plus  $\varepsilon$  de  $p$ .

**Exercice.** On considère une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit sa fonction génératrice  $G_X$  par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

1. Calculer  $G_X(1)$ .
2. Calculer  $G_X$  si  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .
3. Faire de même si  $X$  suit une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. Soit  $Y$  une variable aléatoire définie sur le même espace et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .
5. Application : Montrer qu'on ne peut pas truquer deux dés indépendants de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant soit équirépartie.

**Réponse.**

1. Nous avons  $G_X(1) = \mathbb{E}(1) = 1$ .
2. On suppose que  $X$  suive une loi binomiale de paramètre  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , par théorème de transfert,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (tp + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

3. On suppose que  $X$  suive une loi uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , par théorème de transfert,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=1}^n t^k \frac{1}{n} \\ &= \frac{t - t^{n+1}}{n(1-t)}, \end{aligned}$$

et  $G_X(1) = 1$  d'après la question 1.

4. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendants. Alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t^X$  et  $t^Y$  également, d'où

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) = G_X(t) G_Y(t).$$

5. On note  $X$  et  $Y$  les résultats des deux lancers tels que  $X+Y$  suive une loi uniforme sur  $\{2, \dots, 12\}$ . Alors, de façon similaire à la question précédente, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $G_{X+Y}(t) = \frac{t^2 - t^{13}}{11(1-t)}$ . De plus

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^6 t^k \mathbb{P}(X = k) = t P_X(t), \quad G_Y(t) = \sum_{k=1}^6 t^k \mathbb{P}(Y = k) = t P_Y(t)$$

où  $P_X$  et  $P_Y$  sont des polynômes de degré au plus 5. Donc, d'après la question précédente, par indépendance,

$$\frac{t^2 - t^{13}}{11(1-t)} = G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t) = t^2 P_X(t) P_Y(t)$$

i.e., pour  $t \neq 0, 1 - t^{11} = 11(1-t) P_X(t) P_Y(t)$ . Or  $1 - t^{11}$  admet 1 comme racine puis que des racines complexes non réelles (les racines 11-ième de l'unité). Et  $P_X$  et  $P_Y$  sont de degré 5 donc possèdent au moins une racine réelle. Ainsi  $1 = P_X(1) = 0 = P_Y(1) = 1$  ce qui est absurde.

**Exercice.** On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ . L'urne  $U_1$  contient 2 boules blanches et 3 noires. L'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne où elle provient.
- Si la boule était blanche alors le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$  et si elle était noire alors il se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement "la boule tirée au  $n$ -ième tirage est blanche" et on pose  $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .
2. Montrer que  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. En déduire la valeur de  $p_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ainsi que sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Réponse.**

1. On note  $A_n$  l'événement "l'urne choisie est  $U_1$  au  $n$ -ième tirage". Alors  $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$ . Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 | A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 | A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}.$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors nous avons  $A_{n+1} = B_n$ . Ainsi

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n^c)\mathbb{P}(B_n^c) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$

Donc

$$p_{n+1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7}\right)p_n + \frac{4}{7} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$

3. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique dont le point fixe est donné par  $c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7}$  i.e.

$$c = \frac{35}{41} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{41}.$$

On considère alors la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $q_n = p_n - c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$q_{n+1} = p_{n+1} - c = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7} - \left(-\frac{6}{35}c + \frac{4}{7}\right) = -\frac{6}{35}q_n.$$

Donc la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison  $-\frac{6}{35}$  i.e. pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$q_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} q_1 = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} \left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right).$$

Donc

$$p_n = q_n + c = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} \left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) + \frac{20}{41} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{20}{41}.$$

**Exercice.** À un péage autoroutier  $n$  voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note  $X_1, X_2, X_3$  les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Calculer les variances de  $X_1, X_2$  et de  $X_1 + X_2$ .

3. En déduire la covariance de  $X_1$  et  $X_2$ .

**Réponse.**

1. L'événement qu'une voiture passe la première barrière est une expérience de Bernoulli de probabilité de succès  $\frac{1}{3}$ . Donc  $X_1$  compte le nombre de succès. Ainsi  $X_1$  suit une loi binomiale de paramètre

$$\left(n, \frac{1}{3}\right).$$

2. Nous avons alors, en notant  $p = \frac{1}{3}$ ,

$$\begin{aligned} V(X_1) &= \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) + \mathbb{E}(X_1) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2 p^2 \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2 p^2 \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2 p^2 \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} + np - n^2 p^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = \frac{2n}{9}. \end{aligned}$$

De même  $V(X_2) = \frac{2n}{9}$ . Puis  $X_1 + X_2 = n - X_3$ , d'où

$$V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) = \frac{2n}{9}.$$

3. Nous avons

$$V(x_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2).$$

Donc

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2)) = -\frac{n}{9}.$$

**Exercice.** On considère une variable aléatoire  $X$  d'espérance  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . Montrer, grâce à la variable aléatoire  $Y = (\alpha(X - \mu) + \sigma)^2$ , que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

**Réponse.** Nous avons

$$\mathbb{E}(Y) = \alpha^2 \mathbb{E}((X - \mu)^2) + 2\alpha \mathbb{E}(X - \mu) + \sigma^2 = (\alpha^2 + 1)\sigma^2.$$

Or, par inégalité de Markov, pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

Donc, pour  $a = \sigma^2(\alpha^2 + 1)^2$ , nous avons

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Or

$$\{X \geq \mu + \alpha\sigma\} = \{\alpha(X - \mu) + \sigma \geq (\alpha^2 + 1)\sigma\} \subset \{Y \geq a\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

**Exercice.** On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de  $\frac{1}{2}$ .

1. On tire un dé au hasard parmi les 100. On obtient 6. Quelle est la probabilité  $p_1$  que le dé soit pipé ?
2. On tire un dé au hasard parmi les 100 et on tire  $n$  fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité  $p_n$  que le dé soit pipé ?
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$  et interpréter.

**Réponse.**

1. On note  $P$  l'événement "le dé est pipé" et  $S$  l'événement "le résultat est 6". Alors

$$p_1 = \mathbb{P}(P | S) = \frac{\mathbb{P}(P \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S | P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S | P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S | P^c)\mathbb{P}(P^c)}.$$

Ainsi

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

2. On note  $S_i$  l'événement "le résultat du  $i$ -ième lancer est 6" pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors

$$p_n = \mathbb{P}(P | S_1 \cap \dots \cap S_n).$$

Donc, en supposant que les lancers sont indépendants,

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n | P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n | P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S_1 \cap \dots \cap S_n | P^c)\mathbb{P}(P^c)} = \frac{\frac{1}{2^n} \frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n} \frac{1}{4} + \frac{1}{6^n} \frac{3}{4}} = \frac{6^n}{6^n + 3 \times 2^n}.$$

3. Nous avons

$$p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, plus on obtient de 6 plus on a de chances que le dé soit truqué et si l'on obtient une infinité de 6 alors on est sûr que le dé est truqué.

**Exercice.** Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

1. Calculer l'espérance de  $X_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
2. On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ . Déterminer  $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On pourra calculer l'espérance de  $Y_n$  de deux façons différentes.
3. Déterminer la limite de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Interpréter ce résultat.

**Réponse.**

1. Comme  $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ , nous avons

$$\mathbb{E}(X_k) = 1 \times \mathbb{P}(X_k = 1) + (-1) \times \mathbb{P}(X_k = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1.$$

2. Si  $n = 0$  alors  $Y_n = 1$  et  $p_n = 1$ . Sinon  $n \geq 1$ . Nous avons d'un côté, comme  $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ ,

$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 \times \mathbb{P}(Y_n = 1) + (-1)\mathbb{P}(Y_n = -1) = p_n - (1 - p_n) = 2p_n - 1,$$

et, d'un autre côté, par indépendance des  $X_k$  et la question précédente,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = (2p - 1)^n.$$

Par conséquent  $2p_n - 1 = (2p - 1)^n$  i.e.  $p_n = \frac{(2p - 1)^n + 1}{2}$ .

3. Nous avons  $0 < p < 1$ , donc  $-1 < 2p - 1 < 1$ . Ainsi  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ . Autrement dit, pour  $n$  infiniment grand,  $Y_n$  a autant de chances de valoir 1 que de valoir  $-1$  peu importe la valeur de  $p$ .

**Exercice.** On considère  $\Omega$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  muni de la probabilité  $\mathbb{P}$  uniforme. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on définit la variable aléatoire  $X_k$  par, pour tout  $\sigma \in \Omega$ ,

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_k$ .
2. En déduire son espérance et sa variance.
3. Calculer  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  pour  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .
4. On définit la variable aléatoire  $N$  par, pour tout  $\sigma \in \Omega$ ,

$$N(\sigma) = |\{k \in \{1, \dots, n\}, \sigma(k) = k\}|.$$

Exprimer  $N$  en fonction des  $X_k$ . En déduire  $\mathbb{E}(N)$  et  $V(N)$ .

**Réponse.**

1.  $X_k$  suit une loi de Bernoulli. Nous avons  $|\Omega| = n!$  et  $(n-1)!$  permutations qui fixe  $k$  car elles correspondent aux permutations d'un ensemble à  $n-1$  éléments. Donc,  $\mathbb{P}$  est uniforme,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

2. On en déduit que  $\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n}$  et  $V(X_k) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$ .

3. Si  $i = j$  alors  $\text{Cov}(X_i, X_j) = V(X_i) = \frac{n-1}{n^2}$ . Sinon  $X_i X_j$  est une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

car  $X_i X_j(\omega) = 1$  exactement pour les  $\omega$  qui fixent  $i$  et  $j$ . Ainsi

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)n^2}.$$

4. Soit  $\sigma \in \Omega$ . Alors  $N(\omega)$  est le nombre de points fixes de  $\omega$  et il y a autant de  $X_k(\omega)$  égaux à 1 que de points fixes de  $\omega$ . Donc  $N(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ . Par conséquent  $N = \sum_{k=1}^n X_k$ . Donc, par linéarité de l'espérance,  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 1$ . De même

$$\begin{aligned} V(N) &= \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \frac{n-1}{n} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(n-1)n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{(n-1)n^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$



**Exercice.** On se place à un arrêt de bus et on regarde s'il y a un bus à chaque instant.

- On note  $X_i$  la variable aléatoire valant 1 s'il y a un bus et 0 sinon à chaque minute  $i \in \mathbb{N}^*$ . On définit  $p = \mathbb{P}(X_i = 1)$  et on suppose que les  $X_i$  sont indépendants.
- On note  $N_k$  la variable aléatoire qui compte le nombre de bus qui se sont arrêtés à l'arrêt de bus entre l'instant 0 et l'instant  $k \in \mathbb{N}^*$ . Autrement dit

$$N_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

- On note  $T_n$  l'instant d'arrivée du  $n$ -ième bus à l'arrêt de bus, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Autrement dit

$$T_n = \inf\{k \in \mathbb{N}^*, N_k = n\}.$$

1. Rappeler la loi de  $N_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
2. Déterminer la loi de  $T_1$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(T_n = +\infty) = 0$ .
4. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $(T_1, \dots, T_n)$ .
5. Déterminer, pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k \geq n$ , la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $N_k = n$ .
6. On considère, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $U_k = k - T_{N_k}$  et  $V_k = T_{N_{k+1}} - k$ . Interpréter les variables aléatoires  $U_k$  et  $V_k$ .
7. Déterminer les lois des variables aléatoires  $U_k$  et  $V_k$  et montrer qu'elles sont indépendantes.
8. Déterminer la loi de  $T_{k+1} - T_k$ . En déduire son espérance. Le résultat est-il intuitif ?

**Réponse.**

1. Comme  $X_1, \dots, X_k$  sont indépendants et suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ ,  $N_k$  suit une loi binomiale de paramètre  $(k, p)$ .
2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors l'événement  $\{T_1 = k\}$  correspond à  $N_k = 1$  et  $N_\ell = 0$  pour tout  $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$  car  $N$  est une suite d'entiers croissante. Donc

$\mathbb{P}$