Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*, E$ un ensemble à n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triples $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n, p avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

2. Que peut-on dire si n tend vers $+\infty$?
3. Interpréter.

Exercice. On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa fonction génératrice G_X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

1. Calculer $G_X(1)$.
2. Calculer G_X si X suit une loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times\ ]0, 1[$.
3. Faire de même si X suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
5. Application : Montrer qu'on ne peut pas truquer deux dés indépendants de façon à ce que la somme des points obtenus en les lançant soit équirépartie.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en chercherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne où elle provient.
- Si la boule était blanche alors le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et si elle était noire alors il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice. À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice. On considère une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer, grâce à la variable aléatoire $Y = (\alpha(X-\mu)+\sigma)^2$, que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100. On obtient 6. Quelle est la probabilité p_1 que le dé soit pipé ?

2. On tire un dé au hasard parmi les 100 et on tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Exercice. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

1. Calculer l'espérance de X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pourra calculer l'espérance de Y_n de deux façons différentes.

3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat.

Exercice. On considère Ω l'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ muni de la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on définit la variable aléatoire X_k par, pour tout $\sigma \in \Omega$,

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(k) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_k.

2. En déduire son espérance et sa variance.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour $i, j \in \{1, ..., n\}$.

4. On définit la variable aléatoire N par, pour tout $\sigma \in \Omega$,

$$N(\sigma) = |\{k \in \{1, ..., n\},\ \sigma(k) = k\}|.$$

Exprimer N en fonction des X_k. En déduire $\mathbb{E}(N)$ et $V(N)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html