Question de cours. Résoudre sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = \cos(2t).$$

Question de cours. Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$y' + ay = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution y de l'équation différentielle soit T-périodique.
2. En déduire que l'équation différentielle admet une unique solution T-périodique.

Réponse.

1. On considère y une solution de l'équation différentielle.
   - On suppose que y est T-périodique. Alors
   $$y(0) = y(0+T) = y(T).$$
   - Réciproquement on suppose que $y(0) = y(T)$. On considère la fonction $z : x \longmapsto y(x+T)$. Alors la fonction z est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$z'(x) = y'(x+T) = \varphi(x+T) - ay(x+T) = \varphi(x+T) - az(x).$$
   Ainsi les fonctions y et z vérifient le même problème de Cauchy car $z(0) = y(0+T) = y(T) = y(0)$. Par conséquent $z = y$. Autrement dit la fonction y est T-périodique.
2. On considère y une solution T-périodique de l'équation différentielle. Or l'équation homogène associée est
   $$y' + ay = 0$$
   de solutions
   $$x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda e^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Pour obtenir une solution particulière nous appliquons la méthode de variation de la constante : on considère $\lambda \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y_p(x) = \lambda(x)e^{-ax}, x \in \mathbb{R}$. Alors y_p est solution de l'équation différentielle si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lambda'(x)e^{-ax} - a\lambda(x)e^{-ax} + a\lambda(x)e^{-ax} = \varphi(x)$$
   i.e.
   $$\lambda'(x) = \varphi(x)e^{ax}.$$
   En particulier
   $$y_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\int_0^x \varphi(t)e^{at}dt\right)e^{-ax}$$
   est une solution particulière de l'équation différentielle. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x \varphi(t)e^{at}dt\right)e^{-ax}.$$
   Or $y(0) = y(T)$ par T-périodicité, donc
   $$\lambda = \left(\lambda + \int_0^T \varphi(t)e^{at}dt\right)e^{-aT} = \lambda e^{-aT} + \int_0^T \varphi(t)e^{a(t-T)}dt.$$
   i.e.
   $$\lambda = \frac{1}{1 - e^{-aT}} \int_0^T \varphi(t)e^{a(t-T)}dt.$$

Réciproquement on considère

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\lambda + \int_0^x \varphi(t) e^{at} dt\right) e^{-ax}$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{-aT}} \int_0^T \varphi(t) e^{a(t-T)} dt.$$

Alors, d'après ce qui précède, y est solution de l'équation différentielle. De plus, par choix de λ,

$$y(T) = \left(\lambda + \int_0^T \varphi(t) e^{at} dt\right) e^{-aT} = \lambda = y(0).$$

Donc, d'après la question précédente, y est T-périodique.

Exercice. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ soient toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Réponse. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est

$$r^2 + ar + b = 0$$

de discriminant

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

Distinguons plusieurs cas.

- Si $4b < a^2$ alors $\Delta > 0$. Dans ce cas les solutions distinctes de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

  Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $4b = a^2$ alors $\Delta = 0$. Dans ce cas la solution de l'équation caractéristique est

$$r_0 = -\frac{a}{2}.$$

  Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Si $4b > a^2$ alors $\Delta < 0$. Dans ce cas l'équation caractéristique n'admet pas de solutions réelles mais seulement deux solutions complexes conjuguées distinctes

$$r_1 = \frac{-a + i\sqrt{4b - a^2}}{2}, \quad r_2 = \frac{-a + i\sqrt{4b - a^2}}{2}.$$

  Ainsi les solutions réelles de l'équation différentielle sont de la forme

$$y(x) = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} x\right)\right) e^{-\frac{a}{2} x}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons alors remarquer.

- Si $4b < a^2$ et $\sqrt{a^2 - 4b} \leq a$ alors les solutions r_1, r_2 de l'équation caractéristique vérifient

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \leq 0, \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \leq 0.$$

  Donc toute solution y de l'équation différentielle associée à $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|y(x)| \leq |\lambda| + |\mu|.$$

  Par conséquent toutes les solutions de l'équation différentielle sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $4b < a^2$ et $\sqrt{a^2-4b} > a$ alors la solution r_1 de l'équation caractéristique vérifie
$$r_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} > 0.$$
Donc la solution y de l'équation différentielle associée $\lambda = 1, \mu = 0$ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$y(x) = e^{r_1 x}.$$
Par conséquent toutes les solutions de l'équation différentielle ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $4b = a^2$ et $a > 0$ alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la solution y associée à λ, μ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$|y(x)| \leq (|\lambda| + |\mu| x) e^{r_0 x}.$$
Or $r_0 = -\dfrac{a}{2} < 0$ donc, par croissance comparée,
$$|y(x)| \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par conséquent toutes les solutions de l'équation différentielle sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $4b = a^2$ et $a \leq 0$ alors, pour $\lambda = 0, \mu = 1$, la solution y associée à $0, 1$ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$y(x) = x e^{r_0 x} = x e^{-\frac{a}{2}}.$$
Ainsi
$$y(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par conséquent toutes les solutions de l'équation différentielle ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $4b > a^2$ et $a \geq 0$ alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la solution y associée à λ, μ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, comme $a \geq 0$,
$$|y(x)| \leq |\lambda| + |\mu|.$$
Par conséquent toute solution de l'équation différentielle est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $4b > a^2$ et $a < 0$ alors, pour $\lambda = 1, \mu = 0$, la solution y associée à $1, 0$ vérifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} x\right) e^{-\frac{a}{2} x}.$$
Ainsi, comme $4b - a^{2\text{‘}} \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$y\left(\frac{4\pi n}{\sqrt{4b-a^2}}\right) = e^{-a \frac{2\pi n}{\sqrt{4b-a^2}}}.$$
Donc, comme $a < 0$,
$$y\left(\frac{4\pi n}{\sqrt{4b-a^2}}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Par conséquent toutes les solutions de l'équation différentielle ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}_+$.

En conclusion nous obtenons que les solutions de l'équation différentielle sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. $4b < a^2$ et $\sqrt{a^2-4b} \leq a$,
2. $4b = a^2$ et $a > 0$,
3. $4b > a^2$ et $a \geq 0$.

Question de cours. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ puis sur $I = [0, +\infty[$ l'équation différentielle
$$2xy' - 3y = \sqrt{y}.$$

Question de cours. Montrer que le produit, d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0, tend vers 0.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt.$$
Montrer que la fonction f vérifie une équation différentielle linéaire. En déduire l'ensemble des fonctions f qui vérifient l'égalité précédente.

Réponse. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons par développement de $\cos(a+b)$
$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)(\cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t))dt = 1 + \cos(x)\int_0^X f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt.$$
Donc la fonction f est dérivable comme combinaison de telles fonctions et
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + f(x)\cos(x)^2 + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + f(x)\sin(x)^2 \\ &= f(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt. \end{aligned}$$
Donc la fonction f est deux fois dérivable et
$$\begin{aligned} & f''(x) \\ = \ & f'(x) - \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - f(x)\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)dt + f(x)\cos(x)\sin(x) \\ = \ & f'(x) + 1 - f(x). \end{aligned}$$
Donc la fonction f vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$
$$y'' - y' + y = 1.$$
L'équation homogène associée est
$$y'' - y' + y = 0$$
d'équation caractéristique
$$r^2 - r + 1 = 0$$
de discriminant
$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2.$$
Donc les solutions de l'équation caractéristique sont
$$r_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$
Ainsi les solutions de l'équation homogène sont de la forme
$$y_h(x) = \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Or une solution particulière de l'équation différentielle est $y = 1$. Donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme
$$y(x) = 1 + \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
Par conséquent, par double inclusions, on en déduit que l'ensemble des $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant l'égalité de l'énoncé est
$$\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 + \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$f'(x) + af(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Réponse. On considère la fonction $g = f' + af$. Alors la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$y' + ay = g(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

L'équation homogène est

$$y' + ay = 0$$

dont les solutions sont de la forme

$$y_h(x) = \lambda e^{-ax}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière on effectue la méthode de variation de la constante. On considère $\lambda \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $y : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda(x)e^{-ax}$. Alors la fonction y est solution de l'équation différentielle si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lambda'(x)e^{-ax} - a\lambda(x)e^{-ax} + a\lambda e^{-ax} = g(x)$$

i.e.

$$\lambda'(x) = g(x)e^{ax}.$$

En particulier $y_p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$y_p(x) = \left(\int_0^x g(t)e^{at}dt\right)e^{-ax},$$

est une solution particulière de l'équation différentielle. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^{at}\right)e^{-ax} = \lambda e^{-ax} + \left(\int_0^x g(t)e^{at}\right)e^{-ax}$$

Or $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, comme $a > 0$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq A$,

$$|g(x)| \leq a\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \geq A$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x g(t)e^{a(t-x)}dt\right| &\leq a\varepsilon \int_0^x e^{a(t-x)}dt \\
&= \varepsilon\left[e^{a(t-x)}\right]_0^x \\
&= \varepsilon(1 - e^{-ax}) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^x g(t)e^{a(t-x)}dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même, comme $a > 0$, $\lambda e^{-ax} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Question de cours. Trouver l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Question de cours. Montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.

Exercice. Soient $\omega, \omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0)$.

Réponse. L'équation différentielle homogène associée est

$$y'' + \omega^2 y$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

de solutions

$$r_1 = i\omega, \quad r_2 = -i\omega.$$

Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_h(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation différentielle de la forme

$$y_p(x) = a\cos(\omega_0 x) + b\sin(\omega_0 x), \quad x \in \mathbb{R},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors y_p est solution de l'équation différentielle si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-a\omega_0^2 \cos(\omega_0 x) - b\omega_0^2 \sin(\omega_0) + a\omega^2 \cos(\omega_0 x) + b\omega^2 \cos(\omega_0 x) = \cos(\omega_0 x)$$

i.e.

$$a(\omega^2 - \omega_0^2)\cos(\omega_0 x) + b(\omega^2 - \omega_0^2)\sin(\omega_0 x) = \cos(\omega_0 x).$$

Donc, par liberté de la famille $(\cos, \sin)$ dans l'espace des fonctions, si et seulement si

$$a(\omega^2 - \omega_0^2) = 1, \quad b(\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Distinguons deux cas :

- Si $\omega \neq \omega_0$ alors la fonction

  $$y_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x)$$

  est une solution particulière de l'équation différentielle. Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

  $$y(x) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x) + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

  Or si une solution $y = y_{\lambda,\mu}$ vérifié $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ alors

  $$1 = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda, \quad 0 = \mu\omega$$

  i.e.

  $$\lambda = 1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \mu = 0.$$

  Donc, dans ce cas, l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est

  $$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x) + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\cos(\omega x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x).$$

- Si $\omega = \omega_0$ alors une solution particulière est $y_p : x \longmapsto \cos(\omega_0 x)$. Ainsi les solutions de l'équation sont de la forme

$$y(x) = \cos(\omega_0 x) + \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or si une solution $y = y_{\lambda,\mu}$ vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ alors

$$1 = 1 + \lambda, \quad 0 = \mu\omega$$

i.e.

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0.$$

Donc, dans ce cas, l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ est $y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(\omega_0 x)$.

Exercice. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + y = \max(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Réponse. Procédons par analyse-synthèse.

- Soit y une solution de l'équation différentielle. Alors y est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$y'(x) + y(x) = x.$$

Ainsi y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$

$$y' + y = x, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

de solutions de l'équation homogène

$$y_h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \lambda e^{-x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

et de solution particulière

$$y_p : x \in \mathbb{R}_+, \longmapsto x - 1.$$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$y(x) = x - 1 + \lambda e^{-x}.$$

En particulier

$$y(0) = -1 + \lambda, \quad y'(0) = 1 - \lambda.$$

De plus y est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_-$

$$y' + y = 0.$$

Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$,

$$y(x) = \mu e^{-x}.$$

En particulier

$$y(0) = \mu, \quad y'(0) = -\mu.$$

Ainsi

$$\mu = -1 + \lambda.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} x - 1 + \lambda e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ (1 - \lambda)^{e^{-x}} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

- Réciproquement on considère $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} x - 1 + \lambda e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ (1 - \lambda)e^{-x} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Alors la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$ alors

$$y'(x) + y(x) = 1 - \lambda e^{-x} + x - 1 + \lambda e^{-x} = x = \max(x, 0)$$

et si $x < 0$ alors

$$y'(x) + y(x) = -(1 - \lambda)e^{-x} + (1 - \lambda)e^{-x} = 0 = \max(x, 0).$$

Donc la fonction y vérifie l'équation différentielle souhaitée sur $\mathbb{R}$.