$\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs

Pré-requis

- Connexité par arcs.
- Ensemble dénombrable.

1 Plan privé de certains points

Le plan euclidien est connexe par arcs, mais le reste-t-il si on lui retire un point, un nombre fini de points ou un nombre dénombrable de points ? Nous allons répondre (par l'affirmative) à ces questions, de la plus simple à la plus compliquée.

Proposition : *L'espace topologique $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs.*

Démonstration : Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$, le chemin $\gamma : [0,1] \mapsto tb + (1-t)a$ est à valeur dans $\mathbb{R}^2$, d'origine a et d'extrémité b. Ceci montre que $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs. ■

Proposition : *L'espace topologique $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.*

Démonstration : La démonstration se comprends mieux avec un dessin et nous invitons le lecteur à regarder la figure 1 avant de lire la suite.

Notons $a_1, \ldots, a_n$ les points retirés à $\mathbb{R}^2$ et considérons $r := \dfrac{1}{3} \min\limits_{i \neq j} ||a_i - a_j||$. Remarquons en particulier que r est strictement positif.

Soient $a, b \in \mathbb{R}^2\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$. Posons $r_a := \dfrac{1}{3} \min\limits_{1 \leq j \leq n} ||a - a_j||$ et $r_b := \dfrac{1}{3} \min\limits_{1 \leq j \leq n} ||b - a_j||$, et considérons $R := min\{r, r_a, r_b\}$ qui est strictement positif. En particulier, les cercles de rayon R et de centre $a, b, a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux disjoints et ne contiennent aucun des points $a_1, \ldots, a_n$.

Considérons le chemin $\gamma : [0,1] \mapsto tb + (1-t)a$. Il y a deux possibilités, soit $\gamma([0,1])$ est inclus dans $\mathbb{R}^2\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ (i.e. le chemin ne rencontre aucun des points de P) et alors on a trouvé un chemin reliant a à b qui convient. Soit le chemin $\gamma([0,1])$ passe par des points de P, il existe donc un entier $k \in [\![1, n]\!]$ et des réels $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ tels que pour tout $l \in [\![1, k]\!]$ on ait $\gamma(t_l) \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dans ce cas, pour chaque t_l, il existe $u_l, v_l \in [0,1]$ tels que $\gamma([u_l, v_l]) \subset [a, b]$ soit un diamètre du cercle de centre $\gamma(t_l)$ et de rayon R. Quitte à réindexer on peut supposer que $0 < u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \ldots < u_k < v_k < 1$. Considérons le chemin $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui coïncide avec le chemin γ sur $[0, u_1]$, $[v_k, 1]$ et chaque segment de la forme $[v_l, u_{l+1}]$ pour $l \in [\![1, k-1]\!]$ et qui suit un des demi-cercles délimités par $\gamma(u_l), \gamma(v_l)$ sur les segments $[u_l, v_l]$ pour $l \in [\![1, k]\!]$. Par construction, le chemin τ est à valeur dans $\mathbb{R}^2\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ et relie les points a et b. Ainsi $\mathbb{R}^2\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ est connexe par arcs. ■

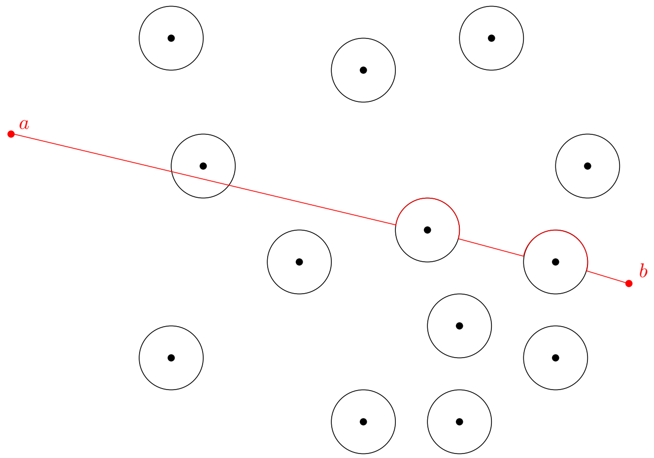

Figure 1: Le plan euclidien privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.

Théorème 1 :
L'espace topologique $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre dénombrable de points est connexe par arcs.

Démonstration : Notons P l'ensemble dénombrable de points que l'on a retiré à $\mathbb{R}^2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}^2\backslash P$, considérons le segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^2$ et Δ sa médiatrice (cf figure 2). Pour chaque point c de la médiatrice on peut lui associer le chemin

$$\gamma_c : t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} (1-2t)a + 2tc & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-t)c + (2t-1)b & \text{sit } \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Remarquons que si c et c' sont deux points de Δ alors $\gamma_c([0,1]) \cap \gamma_{c'}([0,1]) = \{a, b\}$. Mais alors chaque point de P appartient à au plus un des chemins γ_c pour $c \in \Delta$ (on rappel que par hypothèse a et b ne sont pas dans P), or il y a un nombre indénombrable de chemin reliant a à b de la forme γ_c. Comme P est dénombrable, il existe forcément un chemin de la forme γ_c qui convient. ■

Remarque : Il s'agit d'une preuve qui peut s'adapter selon les goûts et les couleurs. Au fond, il s'agit de montrer qu'il existe un nombre indénombrable de "chemins distincts" reliant a à b, la conclusion restant la même.

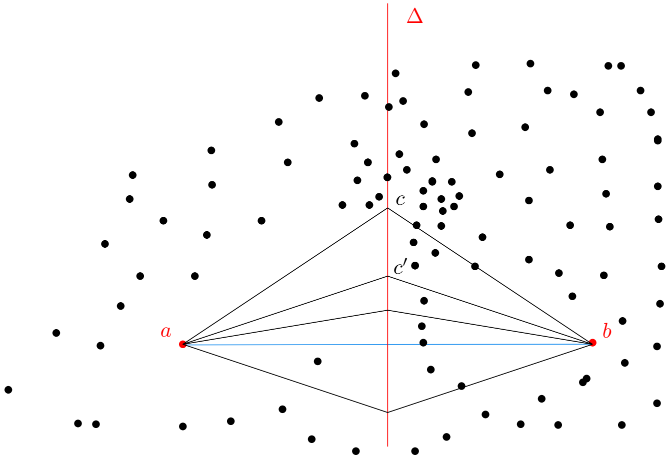

Figure 2: Le plan euclidien privé d'un nombre dénombrable de points est connexe par arcs.

Corollaire. *L'espace topologique* $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ *est connexe par arcs.*

Démonstration : L'ensemble $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable comme produit d'ensembles dénombrables, le théorème précédent permet de conclure. ∎

2 Séparation de points du plan par une droite

Dans cette partie on se pose la question suivante : si on considère des points (ou une suite de points) $a_1, \ldots, a_n$ du plan, existe-t-il une droite qui ne passe par aucun de ces points ?

Proposition : *On se donne $a_1, \ldots, a_n$ des points du plan euclidien alors il existe une droite qui ne passe par aucun de ces points.*

Démonstration : Étant donné qu'il y a un nombre fini de points, il existe un cercle de centre a_1 et de rayon r (prendre par exemple $r := \max\limits_{1 \leq j \leq n} ||a_1 - a_j|| + 1$) qui contient tous les points $a_1, \ldots, a_n$. Il suffit de considérer une droite n'intersectant pas ce cercle, par exemple la droite parallèle à la droite $(a_1 a_n)$ et à distance $2r$ de a_1. ∎

Théorème 2 :
Soient P un ensemble dénombrable de points du plan et une droite d, alors il existe une droite Δ perpendiculaire à d qui ne passe par aucun point de P.

Démonstration : Comme P est dénombrable, il y a un nombre fini ou dénombrable de droites perpendiculaires à d qui contiennent au moins un point de P. Or il y a un nombre indénombrable de droites perpendiculaires à d, il en existe donc une qui ne contient aucun point de P. ∎

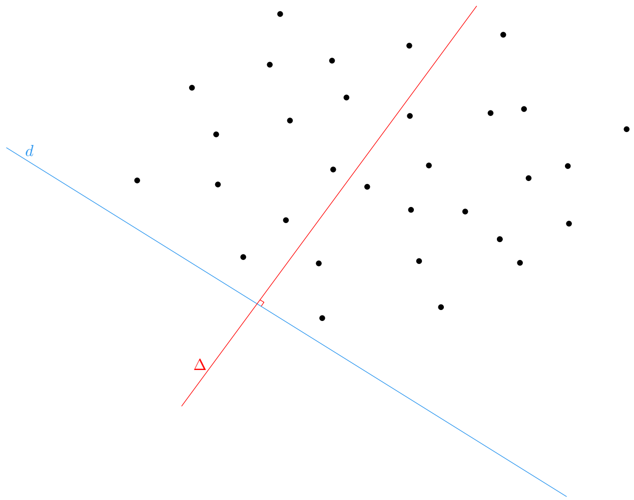

Figure 3: Il existe une droite avec une direction donnée qui ne passe par aucun des points marqués (en nombre dénombrable).

Théorème 3 :
Soit P un ensemble dénombrable de points du plan et a un point du plan n'appartenant pas à P, alors il existe une droite Δ contenant a et qui ne passe par aucun point de P.

Démonstration : Comme P est dénombrable, il y a un nombre fini ou dénombrable de droites passant par a qui contiennent au moins un point de P. Or il y a un nombre indénombrable de droites passant par a, il en existe donc une qui ne contient aucun point de P. ∎

Remarque : Les énoncés précédents se généralisent à des dimensions supérieures (et infinie) en échangeant les droites par des hyperplans fermés. Le raisonnement est exactement le même.

On pourrait se demander si le résultat est encore vrai si l'on considère un "ensemble plus grand que dénombrable" comme $\mathbb{R}$ par exemple. Il se trouve que c'est faux, on

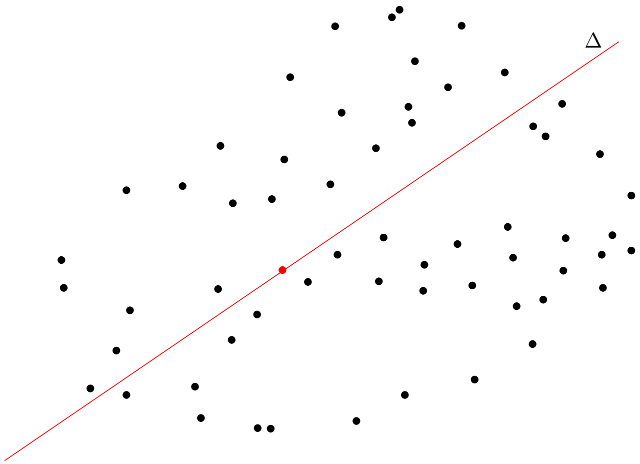

Figure 4: Il existe une droite passant par un point donné qui ne passe par aucun des points marqués (en nombre dénombrable).

peut par exemple considérer le graphe de la fonction suivante :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \tan(x) & \text{si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

dont le graphe est représenté figure 5.

Il est assez clair que toute droite du plan intersecte au moins une fois le graphe de cette fonction mais cette dernière n'est pas continue! Il se trouve qu'il existe aussi une fonction continue qui intersecte toute les droites du plan comme le montre la proposition suivante.

Proposition : *Toute droite du plan euclidien intersecte le graphe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui a x associe $\sin(x)e^x$.*

Démonstration : La proposition se devine sur la figure 6, le plus dur est de le formaliser!
Prenons d une droite. Soit d est parallèle à l'axe des abscisses donc d à une équation de la forme $y = K$ où $K \in \mathbb{R}$ est constant. Il existe un entier n tel que $g(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = \exp(2n\pi)$ soit supérieur à $|K|$ et donc $\{-|K|, |K|\} \subset g([\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi])$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x \in [\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi]$ tel que $g(x) = K$ et donc le graphe de g intersecte la droite d.
Sinon d n'est pas parallèle à l'axe de abscisse et l'intersecte donc en un point $(x_0, 0)$.

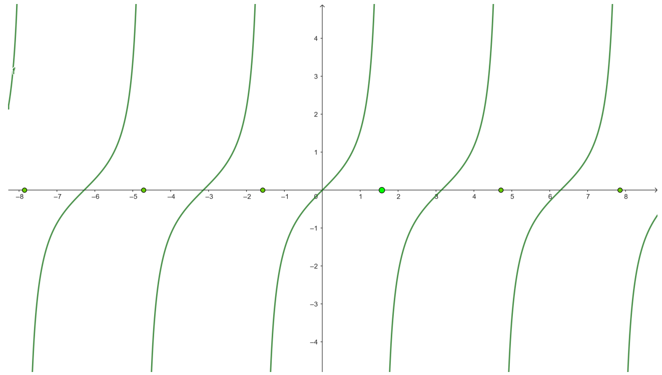

Figure 5: Graphe de la fonction f.

Si $x_0 \in \pi\mathbb{Z}$ alors $g(x_0) = 0$ également et donc le graphe de g intersecte la droite d en $(x_0, 0)$. Sinon remarquons que d sépare le plan en deux régions connexes A et B contenant respectivement les demi-droites $]-\infty, x_0[$ et $]x_0, +\infty[$. Il existe un entier k tel que $k\pi < x_0 < (k+1)\pi$. Comme $g(\pi\mathbb{Z}) = \{0\}$ alors $(k\pi, g(k\pi)) \in A$ et $((k+1)\pi, g((k+1)\pi)) \in B$, donc le graphe de g rencontre à la fois A et son complémentaire (i.e. B). De plus, le graphe de g est connexe comme image d'un connexe par une application continue. Par le lemme des douanes le graphe de g rencontre la frontière de A qui est exactement d. ■

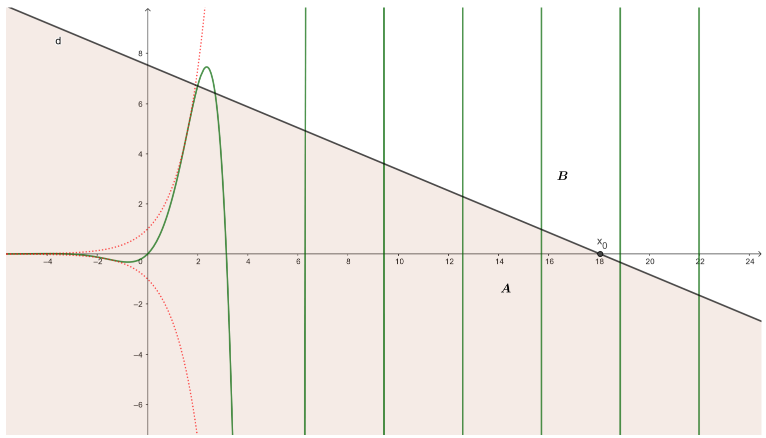

Figure 6: Graphe de la fonction g en vert. En rouge sont représentés les graphes des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -e^x$.