Valeurs rationnelles de $\cos(a\pi)$.

Pré-requis

— Formules trigonométriques.
— Entiers algébriques (base).
— Racines complexes de l'unité.

Introduction

On se pose la question suivante : Quelles sont les valeurs rationnelles que peut prendre l'expression $\cos(a\pi)$ lorsque a est un nombre rationnel ? Cette question d'apparence compliquée peut-être résolue de manière élémentaire en utilisant les entiers algébriques. Une fois résolue, on peut se poser exactement la même question mais en remplaçant « cosinus » par « sinus » ou encore par « tangente » .

1 Valeurs possibles pour la fonction cosinus

Proposition : *Si a est rationnel et que $\cos(a\pi)$ l'est également alors ce dernier est égal à l'une des valeurs suivantes :* $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$ *ou* 1.

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Notons $a = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et donc $\cos(a\pi)$ est la partie réelle de $\omega := \exp\left(\frac{2ip\pi}{q}\right)$ qui est une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité. Ainsi ω et $\frac{1}{\omega} = \exp\left(\frac{-2ip\pi}{q}\right)$ sont des entiers algébriques (car racine de $X^q - 1$) et donc $2\cos(a\pi) = \omega + \frac{1}{\omega}$ est aussi un entier algébrique [1]. Or un rationnel qui est aussi un entier algébrique est forcément entier [2] et donc $2\cos(a\pi) \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$. Par suite $\cos(a\pi) \in \{-1,\ \frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\}$.
Réciproquement pour chacune de ces valeurs il existe un $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi)$ lui soit égale. Ce sont donc les seules valeurs possibles. ∎

Il existe une autre preuve un peu plus longue qui ne fait pas appel à la notion d'entier algébrique mais qui utilise les polynômes de Tchebytchev. On peut la trouver en ligne sur [2] avec en bonus des applications géométriques !

1. La somme ou le produit de deux entiers algébriques est un entier algébrique.
2. Si $\overline{\mathbb{Z}}$ désigne l'ensemble des entiers algébriques alors $\overline{\mathbb{Z}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

2 Valeurs possibles pour la fonction sinus

Proposition : *Si a est rationnel et que $\sin(a\pi)$ l'est également alors ce dernier est égal à l'une des valeurs suivantes :* $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$ *ou* 1.

Pour démontrer cette proposition, on pourrait faire exactement le même raisonnement que pour le cosinus dans la première partie. On va plutôt choisir d'exploiter une relation trigonométrique entre le sinus et le cosinus.

Démonstration : Notons $a = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et remarquons que si $\sin\left(\frac{p}{q}\pi\right) \in \mathbb{Q}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{q}\pi\right) = \sin\left(\frac{p}{q}\pi\right) \in \mathbb{Q}$. Or $\frac{\pi}{2} - \frac{p}{q}\pi = \frac{q-2p}{2q}\pi$ et est donc de la forme $a\pi$ avec $a \in \mathbb{Q}$. D'après la partie précédente les seules valeurs rationnelles de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{q}\pi\right)$ sont $-1,\ \frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$ et 1. On en déduit que se sont également les seules valeurs rationnelles possibles pour les nombres de la forme $\sin(a\pi)$ avec $a \in \mathbb{Q}$.
Réciproquement pour chacune de ces valeurs il existe un $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\sin(a\pi)$ lui soit égale. Ce sont donc les seules valeurs possibles. ∎

3 Valeurs possibles pour la fonction tangente

Proposition : *Si a est rationnel et que $\tan(a\pi)$ l'est également alors ce dernier est égal à l'une des valeurs suivantes :* $-1,\ 0$ *ou* 1.

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\tan(a\pi) \in \mathbb{Q}$. On a $\cos(2a\pi) = \frac{1-\tan^2(a\pi)}{1+\tan^2(a\pi)}$ qui est donc rationnel ! D'après la première partie, on en déduit que $\frac{1-\tan^2(a\pi)}{1+\tan^2(a\pi)} \in \{-1,\ \frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\}$ et donc que $\tan^2(a\pi) \in \{0,\ \frac{1}{3},\ 1,\ 3\}$. Il en découle que les seules valeurs rationnelles possibles de $\tan(a\pi)$ avec $a \in \mathbb{Q}$ sont $-1,\ 0$ et 1.
Réciproquement pour chacune de ces valeurs il existe un $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\tan(a\pi)$ lui soit égale. Ce sont donc les seules valeurs possibles. ∎

Références

[1] Mathraning, *Site d'entraînement aux olympiades internationales : https://www.mathraining.be/*

[2] Legrand Pierre, *Publication de l'APMEP : https://www.apmep.fr/Questions-de-rationalite*