Déterminant de Vandermonde

Pré-requis

- Déterminant.
- Polynôme d'interpolation de Lagrange.
- Algèbre linéaire (niveau L1/L2).

1 Déterminant de Vandermonde

1.1 Définitions

♣ **Définition.** Étant donnés $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on appelle **matrice de Vandermonde** de taille m la matrice

$$\mathrm{Vdm}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{m-1} \end{pmatrix} = (\lambda_i^{j-1})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}.$$

Remarque : Pour certains auteurs, une matrice de Vandermonde de taille m est la transposée de la matrice ci-dessus. Dans la suite du document on travaillera avec des matrices carrées (i.e $n = m$) et on s'intéressera au déterminant de ces matrices, la convention choisie n'a donc pas d'importance.

♣ **Définition.** Sans surprise, on appelle **déterminant de Vandermonde** le déterminant d'une matrice de Vandermonde carrée. On le note

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \det\left(\mathrm{Vdm}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right)$$

.

1.2 Inversibilité

Théorème 1 :
La matrice $\mathrm{Vdm}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est inversible si et seulement si les λ_i sont deux à deux distincts.

Démonstration : L'idée est ici d'avoir en tête une preuve rapide pour justifier l'inversibilité de la matrice sans passer par la preuve par récurrence.
Commençons par remarquer que si deux λ_i sont égaux, alors la matrice $\mathrm{Vdm}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ possède deux colonnes similaires donc son déterminant est nul et elle n'est pas inversible.

Supposons maintenant que les λ_i sont deux à deux distincts. On peut voir cette matrice de Vandermonde comme la matrice d'une application linéaire dont on veut montrer que le noyau est réduit à $\{0\}$. Pour cela, considérons $X = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. L'égalité $VX = 0$ est équivalente au système linéaire

$$\begin{cases} x_0 + x_1\lambda_1 + \cdots + x_{n-1}\lambda_1^{n-1} = 0 \\ x_0 + x_1\lambda_2 + \cdots + x_{n-1}\lambda_2^{n-1} = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_0 + x_1\lambda_n + \cdots + x_{n-1}\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}.$$

Si on introduit le polynôme $P = x_0 + x_1X + \cdots + x_{n-1}X^{n-1}$, on peut alors dire que P possède n racines distinctes (car les λ_i le sont). Il est donc nul étant donné qu'il est de degré $n-1$. Par suite, tous ses coefficients sont nuls, donc $X = 0$ et ainsi la matrice de Vandermonde est inversible. ■

1.3 Calcul du déterminant

Théorème 2 (Déterminant de Vandermonde) :
Le déterminant de la matrice $\mathrm{Vdm}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est donné par

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Démonstration : On va proposer deux preuves différentes.

1. Première preuve : par récurrence.

   On va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice de Vandermonde.

   Pour $n = 2$, la formule d'un déterminant 2×2 donne immédiatement que $V(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1$ donc la formule annoncée est vérifiée.

   Supposons qu'elle soit vraie pour un n quelconque. On réalise les opérations suivantes sur les colonnes de la matrice de Vandermonde de taille $n+1$: pour $i = n+1, \dots, 2$ dans cet ordre, on remplace la colonne C_i par $C_i - \lambda_1 C_{i-1}$ de sorte que

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_2^{n-1}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n+1} - \lambda_1 & \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) & \cdots & \lambda_{n+1}^{n-1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \end{vmatrix}.$$

Développant par rapport à la première ligne, il vient que

$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) = \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \cdots & \lambda_2^{n-1}(\lambda_2-\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n+1}-\lambda_1 & \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1) & \cdots & \lambda_{n+1}^{n-1}(\lambda_{n+1}-\lambda_1) \end{vmatrix}.$$

On utilise alors la multilinéarité du déterminant et l'hypothèse de récurrence pour obtenir que

$$\begin{aligned} V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) &= \prod_{j=2}^{n+1}(\lambda_j-\lambda_1)\times V(\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1}) \\ &= \prod_{j=2}^{n+1}(\lambda_j-\lambda_1)\times \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(\lambda_j-\lambda_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(\lambda_j-\lambda_i). \end{aligned}$$

La propriété est donc récurrente.

2. Deuxième preuve : avec des polynômes !

Considérons le polynôme $P(X) = V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},X)$. C'est un polynôme de degré $n-1$ comme l'assure la formule du déterminant avec les permutations :

$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},X) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}p_{i,\sigma(i)}$$

où $p_{i,\sigma(i)}$ désigne le coefficient en place $(i,\sigma(i))$ de la matrice $\mathrm{Vdm}_n(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},X)$. D'autre part, P s'annule sur chacun des λ_i pour $i\leqslant n-1$. Par suite, on peut écrire

$$P(X) = q\prod_{i=1}^{n-1}(X-\lambda_i).$$

avec q une constante vu que P est de degré $n-1$. De plus, le développement selon la dernière ligne du déterminant $V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},X)$ donne que

$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},X) = V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})X^{n-1}+R(X)$$

où $R(X)$ est un polynôme de degré $n-2$. On peut donc identifier q à $V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$. Finalement, en évaluant P en λ_n on obtient

$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = V(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\times\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_i)$$

et on conclut par récurrence.

1.4 Calcul de l'inverse

Soit $(z_1,\cdots,z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts.
D'après les parties précédentes on sait que la matrice $\mathrm{Vdm}_n(z_1,\cdots,z_n)$ est inversible et posons $H=(h_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ son inverse. Déterminons l'expression de H.
On va encore exploiter le lien assez fort entre les polynômes et les matrices de Vandermonde. En effet si $P=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ est un polynome de degré $n-1$ à coefficients complexes alors on a : $\mathrm{Vdm}_n(z_1,\cdots,z_n)\begin{pmatrix}a_0\\ \cdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P(z_1)\\ \vdots\\ P(z_n)\end{pmatrix}$

Autrement dit pour trouver la i-ème colonne de H, il suffit de trouver un polynôme $P_i\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P(z_i)=1$ et $P(z_j)=0$ pour tout $j\neq i$. Le lecteur averti (que vous êtes) aura tout de suite reconnu les polynômes d'interpolations de Lagrange pour les P_i, autrement dit $P_i=\displaystyle\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{X-z_j}{z_i-z_j}$ convient!

Ainsi si l'on choisit les $(h_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ tels que $P_i=\displaystyle\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{X-z_j}{z_i-z_j} =: \sum_{j=0}^{n-1}h_{i,j+1}X^j$ pour tout $1\leq i\leq n$ alors on a bien $\mathrm{Vdm}_n(z_1,\cdots,z_n)H=I_n$.

1.5 Vandermonde avec Python

Les matrices de Vandermonde sont déjà implémentées sous Python dans la bibliothèque numpy, faisons des examples.

```
>>> import numpy as np
>>> x = np.array([1,2,3])
>>> N = 4
>>> np.vander(x)
array([[ 1,  1,  1],
       [ 4,  2,  1],
       [ 9,  3,  1]])
>>> np.vander(x, N)
array([[ 1, 1,  1,  1],
       [ 8, 4,  2,  1],
       [ 27, 9,  3,  1]])
>>> np.vander(x, increasing=True)
array([[  1,   1,   1],
       [  1,   2,   4],
       [  1,   3,   9]])
```

La fonction 'np.vander' prends en entrée un tableau 'x' et renvoie la matrice carré de Vandermonde associée à la liste 'x' à l'envers par rapport aux notations de notre document. On peut rajouter des arguments optionnels, le 'N' qui indique le nombre de colonne de la matrice et si l'on souhaite avoir les même notations que notre document alors il faut rajouter 'increasing=True' à la fin.

2 Applications

Les exercices concernant les matrices ou déterminants de Vandermonde ne sont pas très compliqués en général. La vraie difficulté est de reconnaitre ou trouver une matrice de Vandermonde pour pouvoir avancer dans l'exercice.

> **Exercice 1 :**
> *Montrer que la famille* $(x \mapsto e^{cx})_{c\in\mathbb{C}}$ *est libre.*

> **Exercice 2 :**
> *Soit* $M \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ *des valeurs propres deux à deux distinctes de* M*. Pour tout* $i \in \{1, \cdots, k\}$*) on note* v_i *un vecteur propre associé à la valeur propre* λ_i*.*
> *Montrer que la famille* $(v_1, \cdots, v_k)$ *est libre.*

> **Exercice 3 :**
> *Montrer que* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est nilpotente si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*,* $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$*.*

> **Exercice 4 :**
> *Soient* $z_0, \ldots, z_n$ *des nombres complexes disticts. Montrer que la famille*
>
> $$\Big((X-z_0)^n, \ldots, (X-z_n)^n\Big)$$
>
> *est une base de* $\mathbb{C}_n[X]$*.*

References

[1] Université Joseph Fourier, *Un tour du (Vander)monde en 70 minutes : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ dpiau/capes08/vander.pdf*

[2] Documentation Numpy, *https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.vander.html*

3 Corrections

♠ **Correction de l'exercice 1.**

Par abus de notation on va noter e^{cx} à la place de $x \mapsto e^{cx}$.

Il faut montrer que toutes familles finies $(e^{c_1 x}; \cdots ; e^{c_n x})$ où les $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts est libre.

Soit $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de nombre complexes deux à deux distincts et soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres complexes tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{c_i x} = 0$.

En particulier la fonction $x \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{c_i x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\, x^k} \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{c_i x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^k e^{c_i x} = 0$$

En prenant $x = 1$, on en déduit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{c_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Posons $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{c_2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{c_n} \end{pmatrix}$

On remarque que M est inversible car c'est le produit d'une matrice de Vandermonde de taille n dont tous les $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux distincts et d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

Par suite la relation $M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$ implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ ce qui conclut.

♠ **Correction de l'exercice 2.**

Soit $\mu_1, \cdots, \mu_k \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i v_i = 0$.

En appliquant M successivement, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^k \mu_i \lambda^n v_i = 0$ (1).

Si pour tout i on note $v_i = (v_i^l)_{1\leq l\leq n}$ alors l'équation (1) implique que :

$$\forall l \in \{1, \cdots, k\}, \ \ \mathrm{Vdm}_k(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \begin{pmatrix} \mu_1 v_1^l \\ \vdots \\ \mu_k v_k^l \end{pmatrix} = 0$$

Comme les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ sont deux à deux distincts, on en déduit que pour tout $l \in \{1, \cdots, k\}$ on a $\begin{pmatrix} \mu_1 v_1^l \\ \vdots \\ \mu_k v_k^l \end{pmatrix} = 0$. Par suite (car un vecteur propre n'est jamais nul) $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$ et donc la famille $(v_1, \cdots, v_k)$ est libre.

♠ **Correction de l'exercice 3.**

Commençons par supposer que A est nilpotente. Toutes les valeurs propres de A sont nulles. De plus, une trigonalisation dans $\mathbb{C}$ de A assure que pour tout k, les valeurs propres de A^k sont encore nulles. De fait, si on écrit $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure stricte, $A^k = PT^kP^{-1}$ avec T^k elle-même triangulaire supérieure stricte. Comme les valeurs propres de A^k sont sur la diagonale de T^k, elle sont toutes nulles. Enfin comme la trace est la somme des valeurs propres, on a $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Montrons que toutes les valeurs propres de A sont nulles. Ça nous assurera que A est nilpotente.

Supposons que ce n'est pas le cas, et qu'on a en fait accès à r valeurs propres distinctes non nulles de A notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ et de multiplicitées respectives $m_1, \ldots, m_r$. Le même raisonnement que celui mené au-dessus nous assure que les λ_i^k pour $k \geqslant 1$ sont valeurs propres de A^k et de multiplicités les m_i. Par suite, la relation $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ nous fournit une infinité de relations dont on ne conserve que les r premières :

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r = 0 \\ m_1\lambda_1^2 + \cdots + m_r\lambda_r^2 = 0 \\ \qquad\vdots \\ m_1\lambda_1^r + \cdots + m_r\lambda_r^r = 0 \end{cases}.$$

Ce système se traduit par la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0.$$

Notons M la matrice à gauche dans le terme ci-dessus. Il s'agit presque d'une matrice de Vandermonde. En fait cela va suffire pour conclure. De fait, par multilinéarité, on a $\det(M) = \prod_{i=1}^r \lambda_i \times V(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Comme par hypothèse, les λ_i sont non nulles et distinctes, chaque terme du produit est non nul donc M est une matrice inversible. On en déduit donc que $m_1 = \cdots = m_r = 0$. Ainsi, aucune valeur propre de la matrice A n'est nulle. Elle est donc nilpotente.

♠ **Correction de l'exercice 4.**
On a le bon nombre de vecteurs, il suffit donc de prouver que la famille

$$\mathcal{B} = \Big((X - z_0)^n, \dots, (X - z_n)^n\Big)$$

est libre. Quel rapport avec les déterminants de Vandermonde ? En fait, on va calculer le déterminant de la famille $\mathcal{B}$ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
Pour cela, développons chacun des polynômes de la famille avec le binôme :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ (X - z_i)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j z_i^{n-j}.$$

Le déterminant que l'on voulait calculer s'écrit donc

$$\det(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} z_0^n & \binom{n}{0} z_1^n & \dots & \binom{n}{0} z_n^n \\ \binom{n}{1} z_0^{n-1} & \binom{n}{1} z_1^{n-1} & \dots & \binom{n}{1} z_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} = \binom{n}{0} \cdots \binom{n}{n} \begin{vmatrix} 1 & z_n & \dots & z_n^n \\ 1 & z_{n-1} & \dots & z_{n-1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_0 & \dots & z_0^n \end{vmatrix}.$$

Oh surprise, on voit apparaître un déterminant de Vandermonde. Comme les z_i sont tous distincts, on sait que ce déterminant est non nul, donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. C'est donc une base.