Algorithme de Gauss (mémo)

Pré-requis

- Identités remarquables.
- Forme quadratique.
- Polynôme homogène.

1 Contexte

Dans tout ce qui va suivre $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
L'algorithme de Gauss permet d'écrire toute forme quadratique q (c'est-à-dire un polynôme homogène de degré 2) sur E comme une somme d'au plus n carrés de formes linéaires indépendantes. Autrement dit si q est de rang n (i.e si q est non dégénérée) alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E q-orthogonale.
Sur cette fiche on va juste donner l'algorithme de Gauss avec des exemples pour s'entrainer mais sans aucune preuve.

2 L'algorithme

Soit q une forme quadratique non nul, on peut écrire:

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \quad \text{avec les } a_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

On suppose qu'au moins un des $a_{i,j}$ avec $i \neq j$ est non nul car sinon la forme quadratique q est déjà réduite et il ne faut pas y toucher!
On a juste deux cas:

- Soit il existe un $a := a_{i_0,i_0}$ qui est non nul et alors q peut s'écrire :

$$\begin{aligned} q(x) = a\left(x_{i_0} + \frac{1}{2a} P(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n)\right)^2 - \frac{1}{4a} P(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n)^2 \\ + Q(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

  avec P et Q qui sont des polynômes homogènes de degré respectivement 1 et 2, et où la notation $\widehat{x_{i_0}}$ désigne l'omission de la variable x_{i_0}.

  On ne touchera plus jamais au terme $a\left(x_{i_0} + \frac{1}{2a} P(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n)\right)^2$ jusqu'à la fin de l'algorithme. Pour obtenir une forme réduite de q il faut alors réitérer l'algorithme sur le polynôme homogène de degré 2:

$$-\frac{1}{4a} P(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n)^2 + Q(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \cdots, x_n)$$

  qui peut être vu comme une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$ à réduire[1]...

- Soit il n'existe aucun $a_{i,i}$ non nul et donc on choisit deux indices k, l tels que $a_{k,l}$ soit non nul. La forme quadratique q s'écrit alors:

$$q(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

  On choisit donc deux indices i_0, j_0 tels que a_{i_0,j_0} soit non nul, on écrit:

$$q(x) = a_{i_0,j_0} x_{i_0} x_{j_0} + x_{i_0} S(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \widehat{x_{j_0}}, \cdots, x_n) + x_{j_0} R(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \widehat{x_{j_0}}, \cdots, x_n)$$

  avec R et S qui sont des polynômes homogènes de degré 1. Pour alléger les notations on écrira seulement S à la place de $S(x_1, \cdots, \widehat{x_{i_0}}, \widehat{x_{j_0}}, \cdots, x_n)$, de même pour R. On continue le calcul:

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{i_0,j_0} x_{i_0} x_{j_0} + x_{i_0} S + x_{j_0} R \\ &= a_{i_0,j_0}\left(x_{i_0} + \frac{1}{a_{i_0,j_0}} R\right)\left(x_{j_0} + \frac{1}{a_{i_0,j_0}} S\right) - \frac{1}{a_{i_0,j_0}^2} RS \\ &= \frac{a_{i_0,j_0}}{4}\left(((x_{i_0} + R) + (x_{j_0} + S))^2 - ((x_{i_0} + R) - (x_{j_0} + S))^2\right) - \frac{1}{a_{i_0,j_0}^2} RS \end{aligned}$$

  On ne touchera plus jamais aux termes $\frac{a_{i_0,j_0}}{4}\left(((x_{i_0} + R) + (x_{j_0} + S))^2 - ((x_{i_0} + R) - (x_{j_0} + S))^2\right)$ jusqu'à la fin de l'algorithme. Pour obtenir une forme réduite de q il faut alors réitérer l'algorithme sur le polynôme homogène de degré 2:

$$-\frac{1}{a_{i_0,j_0}^2} RS$$

  qui peut être vu comme une forme quadratique sur un espace de dimension $n-2$ à réduire...

Pour résumer, dans l'algorithme de Gauss soit la variable que l'on considère apparaît au carré et dans ce cas on factorise le carré quitte à faire apparaître artificiellement un double produits, soit il n'y a pas de carré mais dans ce cas on factorise en appliquant la formule de polarisation.

[1] Dans une vraie démonstration on aurait utilisé une hypothèse de récurrence (bien formulée) pour pouvoir conclure.

Remarque : A la fin de l'algorithme il se peut qu'il y ait des coefficients devant les termes en carrés. On peut soit les laisser soit les faire rentrer dans le carré si le coefficient est lui-même un carré dans le corps $\mathbb{K}$.

3 Applications

Exercice 1 :
On prend $E = \mathbb{R}^3$ et on note (x, y, z) un vecteur de E.
Réduire les formes quadratiques suivantes (si c'est possible) et dire si elles sont dégénérées et en donner la signature (pour rappel on peut parler de la signature car $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. $q(x, y, z) = xy + yz$
2. $q(x, y, z) = (x + y)^2 + z^2$
3. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy$
4. $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$
5. $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz$

4 Corrections

♠ **Correction de l'exercice 1.**

Question 1. On fait l'étape 2 de l'algorithme (avec xy) :

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= 1(x + z)(y) - 0 \\ &= (x + y + z)^2 - (x + -y + z)^2 \end{aligned}$$

La forme quadratique est de rang 2, elle est donc dégénérée et sa signature est $(1, 1)$.

Question 2. La forme quadratique est déjà réduite! Son rang est 2 elle est donc dégénérée et sa signature est $(2, 0)$.

Question 3. On reconnait directement que $q(x, y, z) = (x - y)^2$ mais l'étape 1 de l'algorithme de Gauss donne le même résultat. La forme quadratique est de rang 1, elle est donc dégénérée et sa signature est $(1, 0)$.

Question 4. On fait l'étape 1 de l'algorithme (avec x^2):

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$$

On retrouve exactement la même expression de q, ce qui est normal car le polynôme P de l'algorithme est nul! Ce qui montre qu'avec l'habitude on "sait" quel terme choisir. On (re)fait donc l'étape 1 de l'algorithme mais avec y^2:

$$q(x, y, z) = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}z^2$$

La forme quadratique est de rang 3, elle n'est donc pas dégénérée et sa signature est $(2, 1)$.

Question 5. On fait l'étape 1 de l'algorithme (avec x^2):

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 + 2y^2 + z^2 + yz \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{7}{8}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + yz \end{aligned}$$

Le terme $\left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2$ ne va pas changer et on continue de réduire la forme quadratique en refaisant l'étape 1 de l'algorithme avec y^2 sur $\frac{7}{8}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + yz$.

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{7}{8}\left(y + \frac{4}{7}z\right)^2 - \frac{2}{7}z^2 + \frac{3}{4}z^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{7}{8}\left(y + \frac{4}{7}z\right)^2 + \frac{13}{28}z^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}y + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}z\right)^2 \end{aligned}$$

La forme quadratique est de rang 3, elle n'est donc pas dégénérée et elle est même définie positive car sa signature est $(3, 0)$.

References

[Merc] Dany-Jack Mercier. *Fondamentaux de géométrie pour les concours.* Publibook, 2009.

[Unis] Unisciel, *cours en ligne :Lien disponible ici*