Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

Pré-requis

- Groupe, sous-groupe
- Borne inférieure d'un ensemble
- Densité dans $\mathbb{R}$.

1 Propriété

Proposition : *Les sous-groupes (additifs) de $\mathbb{R}$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$ soit denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Si $G = \mathbb{R}$ ou $G = \{0\}$ alors G est respectivement dense dans $\mathbb{R}$ ou de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$.
Dans la suite, On suppose que G est différent de $\mathbb{R}$ ou de $\{0\}$. Il existe alors un $x_0 \in G$ non nul et quitte à prendre $-x_0$, on peut supposer que x_0 est strictement positif. Ainsi, l'ensemble $A := \{x \in G; \quad x > 0\}$ est non vide et minoré par 0, il admet donc une borne inférieure que l'on note a. On distingue deux cas :

- Soit $a = 0$. Montrons alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.

En effet, soit $y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Comme $a = 0$ on a $a \notin A$, de plus a est la borne inférieure de A donc il existe $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < x < \epsilon$ et[1] $n.x \leq y < (n+1).x$. Par suite $0 \leq y - n.x < x < \epsilon$ ce[2] qui montre que G est dense dans $\mathbb{R}$.

- Soit $a > 0$. Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$.

Commençons par montrer que a appartient à G par l'absurde. Supposons que $a \notin G$, comme a est la borne inférieure de A, il existe $x \in G$ tel que $a < x < 2.a$. Toujours par propriété de la borne inférieure, il existe $y \in G$ tel que $a < y < x < 2.a$. Mais alors $0 < x - y < a$ ce qui contredit le fait que a est la borne inférieure de A.
On a donc montré que $a \in G$ et donc que $a\mathbb{Z} \subset G$, montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in G$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n.a \leq x < (n+1).a$ et donc $0 \leq x - n.a < a$. Mais alors $x - n.a \in G \cap \mathbb{R}^+$ et $x - n.a \notin A = G \cap \mathbb{R}_+^*$ donc $x - n.a = 0$ donc $x \in a\mathbb{Z}$.
Par suite $G \subset a\mathbb{Z}$ et donc $G = a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$. ∎

[1] Car $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n.x;(n+1).x[$ puisque $x \neq 0$.

[2] Dans les inégalités précédentes, la notation $n.x$ représente $\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$.

2 Applications

Exercice 1 :

1. *Montrer que l'ensemble $B := \{n + 2k\pi; \quad (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *En déduire l'ensemble $\{\cos(n); \quad n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,1]$.*

Exercice 2 (★★) :

1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, montrer que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ équivaut à $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{2\pi}{a} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $a\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *En déduire que $\{\sin(n); \quad n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1;1]$.*

Exercice 3 :
Soit G un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$. Montrer que G respecte l'une des conditions suivantes :

- $G = \{1\}$,
- *Il existe $b > 1$ tel que $G = b^{\mathbb{Z}}$,*
- *G est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 4 :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_f := \{T \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+T) = f(x)\}$ l'ensemble des périodes de f.

1. *Montrer que E est un sous-groupe de $\mathbb{R}$*
2. *Trouver deux fonctions f et g telles que $E_f = \pi\mathbb{Z}$ et E_g soit dense dans $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que si f est continue en 0 et que E_f est dense dans $\mathbb{R}$ alors f est une fonction constante.*

3 Corrections

♠ **Correction de l'exercice 1.**

Question 1. L'ensemble B contient 0, est stable par addition et passage à l'inverse, c'est donc un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Ainsi soit B est de la forme $a\mathbb{Z}$ soit B est dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que B n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$.
Supposons que B soit de la forme $a\mathbb{Z}$, comme 1 et 2π appartiennent à B il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $1 = u.a$ et $2\pi = v.a$. En particulier u et v sont non nuls et $uv.a \in B$. Mais d'une part $uv.a = u.(v.a) = u.2\pi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et d'autre part $uv.a = v.(u.a) = v.1 = v \in \mathbb{N}$. Par suite $uv.a \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap \mathbb{N}$ ce qui est impossible et donc B est dense dans $\mathbb{R}$.

Question 2. Soit $\epsilon > 0$ et $y \in [-1; 1]$. Comme la fonction cos induit une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$ il existe $x \in [0, \pi]$ tel[3] que $\cos(x) = y$. Par continuité de la fonction cos il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|x-z| < \eta$ on ait $|\cos(x)-\cos(z)| < \epsilon$. Or d'après la première question, il existe $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|x - (n + 2k\pi)| < \eta$ et donc $|\cos(x) - \cos(n + 2k\pi)| < \epsilon$ ou encore $|y - \cos(n)| < \epsilon$.
Par suite l'ensemble $\{\cos(n); \quad n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1; 1]$.

<u>NB:</u> En utilisant la parité de la fonction cos on a que $\{\cos(n); \quad n \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n); \quad n \in \mathbb{N}\}$. On en déduit que $\{\cos(n); \quad n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1; 1]$ ce qui est un résultat plus fort!

♠ **Correction de l'exercice 2.**

Question 1. Posons $G := a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, il contient 0 et est stable par addition et passage à l'inverse, c'est donc un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Ainsi, H est soit dense dans $\mathbb{R}$ soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.

- Si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Si on avait $G = \alpha\mathbb{Z}$ alors il existerait $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $a = u.\alpha$ et $b = v.\alpha$. Comme a et b sont non nuls alors u, v et α sont non nuls également. Mais alors on aurait $\frac{a}{b} = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ ce qui contraire à notre hypothèse de départ. Ainsi, G est dense dans $\mathbb{R}$.
- Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Écrivons que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers non nuls et premiers entre eux et posons $\alpha := \frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.
Soit $g \in G$, on peut écrire g sous la forme $g = a.n + b.m = \alpha(p.n + q.m)$ et donc $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.
Réciproquement, comme p et q sont premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bézout des entiers u et v tels que $up+vq = 1$. Ainsi, $\alpha = \alpha(up+vq) = ua + vb \in G$ et donc $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

[3] Plus exactement $x = \arccos(y)$.

Question 2. D'après la question précédente, on a $a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $u \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Si $0 \in [u - \epsilon; u + \epsilon]$ alors c'est terminé. Sinon supposons que $u-\epsilon > 0$. Il suffit donc de montrer que $]0; \epsilon] \cap a\mathbb{N}+2\pi\mathbb{Z} \neq \emptyset$ car alors on pourra conclure exactement comme dans la preuve des sous-groupes de $\mathbb{R}$ (partie où l'on montre que G et dense dans $\mathbb{R}$).
Par densité, il existe une infinité de nombre de la forme $an + 2\pi m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ dans $]0, \epsilon]$. Soit il existe un tel élément avec un $n \in \mathbb{N}$ et alors c'est terminé. Sinon ils vérifient tous $n < 0$ et alors on en choisit un que l'on note $x = ap+2\pi q$. On peut encore trouver une infinité d'éléments de la forme $an+2\pi m$ dans $]0; x[$ avec $(n, m) \in \mathbb{Z}_-^* \times \mathbb{Z}$. Or pour chaque entier k dans $\{-n+1; -n+2; \cdots; 1\}$ il y a seulement un nombre fini d'éléments de la forme $ak + 2\pi m$ qui sont dans $]0; x[$. Par suite, il existe un $y := an + 2\pi m$ tel que $y \in]0; x[$ et $n \leq p$. Mais alors $x - y \in]0; \epsilon]$ et $x - y = a(p - n) + 2\pi(q - m)$ avec $(p - n) \geq 0$. Par suite il existe forcement un élément de $a\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ dans $]0; \epsilon]$.
Si $u + \epsilon < 0$ alors on reprend le même raisonnement qu'au dessus mais en considérant cette fois $] - \epsilon, 0]$.
En conclusion, $a\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Question 3. D'après la question précédente l'ensemble $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Puis, on procède exactement comme à la question 2 de l'exercice 1 mais en changeant le cos en sin et l'intervalle $[0; \pi]$ en $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

♠ **Correction de l'exercice 3.**

On va considérer l'application bijective $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et montrons que $\ln(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. En effet, $0 \in \ln(G)$ car $\ln(1) = 0$, $\ln(a) + \ln(b) \in \ln(G)$ car $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ et enfin $-\ln(a) \in \ln(G)$ car $-\ln(a) = \ln(a^{-1})$. De fait trois cas s'offrent à nous :

- Soit $\ln(G) = \{0\}$ et donc $G = \{1\}$.
- Soit $\ln(G) = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ et donc $G = (e^a)^{\mathbb{Z}}$ et alors $b = e^a$ convient.
- Soit $\ln(G)$ est dense dans $\mathbb{R}$ et alors G est dense dans $e^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+^*$.

♠ **Correction de l'exercice 4.**

Question 1. On a :

- $0 \in E_f$ car pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $f(x + 0) = f(x)$.
- Si $a, b \in E_f$ alors pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $f(x + a + b) = f(x + a) = f(x)$ et donc $a + b \in E_f$.
- Si $a \in E_f$ alors pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $f(x - a) = f(x - a + a) = f(x)$ et donc $-a \in E_f$.

Ainsi, E_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Question 2. Pour f on peut prendre la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |cos(x)| \in \mathbb{R}$ ou bien la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{\pi\mathbb{Z}}(x) \in \mathbb{R}$ qui vaut 1 si $x \in \pi\mathbb{Z}$ et 0 sinon.
Pour g on peut prendre la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ ou bien la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \in \mathbb{R}$ qui vaut 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon et alors $E_g = \mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

Question 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de E_f dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_f qui tend vers x. D'une part pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(x - T_n) = f(x)$ et donc $f(x - T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. D'autre part par continuité de f en 0 on a $f(x - T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Par suite $f(x) = f(0)$ et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc f est une fonction constante.

<u>**NB:**</u> Si l'on prend $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ alors $E_f = \mathbb{Q}$ et est donc dense dans $\mathbb{R}$ mais f n'est pas constante. L'hypothèse de continuité en 0 est donc nécessaire!