Théorèmes de point fixe 1

Pré-requis

- Ensemble ordonné.
- Borne inférieure et supérieure.
- Application croissante.

1 Dans les ensembles ordonnés

Dans cette section $(E, \leq)$ désigne un ensemble (non vide) ordonné. On aura besoin de la définition d'un treillis pour pouvoir énoncer les théorèmes qui vont suivre, ils permettent de résoudre de manière immédiate des problèmes qui peuvent paraitre compliqués.

♣ **Définition.** Un **treillis** est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ dans lequel toute paire $\{x, y\}$ de E possède une borne inférieure et supérieure. Un **treillis complet** est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ dans lequel toute partie non vide D de E possède une borne inférieure et supérieure.

Dans les ensembles ordonnés on a alors les deux théorèmes de point fixe suivant:

Théorème 1 (Knaster-Tarski) :
Soit $(E, \leq)$ un treillis complet. Toute fonction croissante f de E dans E admet au moins un point fixe. L'ensemble $Fix(f)$ des points fixes de f est un treillis complet pour l'ordre induit.

Remarque : Il existe une réciproque à ce théorème : si toute fonction croissante de E dans E admet un point fixe, alors E est un treillis complet.

Théorème 2 (Tarski-Kantorovitch) :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné vérifiant :

- *Toute suite croissante majorée (x_n) a une borne supérieure x ; on note cela $x_n \uparrow x$.*
- *Toute suite décroissante minorée (y_n) a une borne inférieure y ; on note cela $y_n \downarrow y$.*

Soit $f : E \to E$ une application croissante vérifiant : $x_n \uparrow x \Rightarrow f(x_n) \uparrow f(x)$ et $y_n \downarrow y \Rightarrow f(y_n) \downarrow f(y)$.
On suppose qu'il existe deux éléments x_0 et y_0 de E vérifiant : $x_0 \leq y_0, x_0 \leq f(x_0)$ et $f(y_0) \leq y_0$.
Alors les deux suites (x_n) et (y_n) définies par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $y_{n+1} = f(y_n)$ vérifient : il existe $(x, y) \in E \times E$ tel que $x_n \uparrow x,\ y_n \downarrow y, f(x) = x, f(y) = y$ et $x \leq y$.
De plus, si a est un point fixe de f tel que $a \geq x_0$, alors $a \geq x$; si b est un point fixe de f tel que $b \leq y_0$, alors $b \leq y$.

Remarque : Le premier théorème impose une condition forte sur l'ensemble E tandis que pour le second c'est sur la fonction f.

Un fait très intéressant dont on peut trouver la démonstration dans [Hor] et que l'on peut déduire du théorème 1 ou 2 le théorème de Cantor-Bernstein : Soient E et F deux ensembles, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors il existe une bijection de E dans F.

Démonstration (théorème 1) : Etape 1 : Comme E est un treillis complet alors E possède une borne inférieure et supérieure qui sont ses plus petit élément et plus grand élément, on les note respectivement α et β.
L'ensemble $A = \{z \in E,\ f(z) \leq z\}$ est non vide car $\beta \in A$, notons a sa borne inférieure. De même l'ensemble $B = \{z \in E,\ f(z) \geq z\}$ est non vide car $\alpha \in B$, notons b sa borne supérieure.
Si $z \in A$ alors $a \leq z$ et par croissance de f on a $f(a) \leq f(z) \leq z$ (car $z \in A$). On en déduit que $f(a)$ est un minorant de A et donc que $f(a) \leq a$. Mais alors par croissance de f on a $f(f(a)) \leq a$ et donc $f(a) \in A$ d'où $a \leq f(a)$ car a est la borne inférieure de A. On a montré que $a \leq f(a)$ et que $f(a) \leq a$ et donc $f(a) = a$. De même on montre que $f(b) = b$.
Etape 2 : Il reste à montrer que $Fix(f)$ est un treillis complet. Si $c \in Fix(f)$ alors $c \in A \cap B$ et donc $a \leq c \leq b$, ainsi $Fix(f)$ possède un plus petit et plus grand élément.
Etape 3 : soit $(c_i)_{i \in I}$ une famille de points fixes de f, on note $c := \inf c_i$ (attention ici $c \in E$ mais rien ne dit que c est un point fixe de f) alors pour tout $i \in I$ on a $f(c) \leq f(c_i) = c_i$. On a montré que $f(c)$ est un minorant des $(c_i)_{i \in I}$ et donc $f(c) \leq c$. Introduisons l'ensemble $S := \{z \in E,\ \alpha \leq z \leq c\}$ comme f est croissante et que $f(c) \leq c$ alors S est stable par f et S est un treillis complet pour l'ordre induit. En appliquant l'étape 1 et 2 on en déduit que f admet[1] un plus grand point fixe sur S qui est donc une borne inférieure des $(c_i)_{i \in I}$. On procède de même pour montrer que la famille des $(c_i)_{i \in I}$ possède une borne supérieure. Par suite $Fix(f)$ est un treillis complet pour l'ordre induit. ■

Démonstration (théorème 2) : On vérifie par récurrence que la suite (x_n) est croissante, majorée par y_0, donc (x_n) admet une borne supérieure notée x. On a $x_n \uparrow x$. De même la suite (y_n) est décroissante, minorée par x_0, donc (y_n) admet une borne supérieure notée y. On a $y_n \downarrow y$.
Par hypothèse sur f on a alors $x_{n+1} = f(x_n) \uparrow f(x)$ d'où $f(x) = x$ par unicité de la

[1] Plus précisément c'est $f_{|S}$.

borne supérieure. De même $y_{n+1} = f(y_n) \uparrow f(y)$ d'où $f(y) = y$ par unicité de la borne inférieure.
De plus en utilisant la croissance de f, un raisonnement par récurrence nous donne que pour tout entier p on a $x_p \leq y_p$. Par suite pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ on a $x_m \leq y_n$ car $x_m \leq x_{m+n} \leq y_{m+n} \leq y_n$. Ainsi en faisant tendre m vers l'infini, pour tout entier n on a $x \leq y_n$. Puis $x \leq y$ en faisant tendre n vers l'infini.
Enfin si a est un point fixe de f alors $a = f(a)$ et comme $a \geq x_0$ alors pour tout entier n on a $a \geq x_n$. Par suite $a \geq x$. De même si $b = f(b)$ avec $b \leq y_0$ alors $b \leq y$. ■

Attention dans le théorème 1 l'hypothèse $(E, \leq)$ est un treillis complet est importante comme le montre le contre-exemple suivant:

Contre-exemple : l'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est un treillis mais il n'est pas complet car il ne possède pas de plus grand élément et/ou que $[0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - 1 \in \mathbb{R}$ est croissante mais n'admet pas de point fixe!

> **Exercice 1 :**
> 1. *Montrer que toute fonction croissante de* $[0, 1] \to [0, 1]$ *admet un point fixe.*
> 2. *Soit* X *un ensemble. Montrer que toute application* $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *croissante pour l'inclusion admet un point fixe.*

References

[Hor] Pierre-Jean Hormière, *Théorèmes de point fixe : cliquer ici pour le lien*

[Rouv] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentie*

2 Corrections

♠ **Correction de l'exercice 1.**

Question 1. L'ensemble $[0, 1]$ est un treillis complet pour son ordre naturel, il suffit d'appliquer le théorème 1.

Question 2. L'ensemble $(\mathcal{P}(X), \subset)$ est un treillis complet, il suffit d'appliqer le théorème 1.