

Théorèmes de point fixe 2

Pré-requis

- Espace métrique et complet.
- Equation intégrale.
- Application contractante.

1 Dans un espace métrique complet

On va énoncer et démontrer LE théorème de point fixe : le théorème de point fixe de Banach-Picard. Son énoncé est simple mais il est d'une utilité et efficacité redoutable! On l'utilise par exemple pour démontrer des théorèmes connus comme le théorème d'inversion local, des fonctions implicites, de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ou encore sur l'équation intégral de Fredholm. On ne peut donc pas passer à coté de cette énoncé fondamental.

Théorème 1 (Point fixe de Banach-Picard) :

Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et f une application de X dans lui-même. Si f est contractante (c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$) alors f admet un unique point fixe dans X noté a .

De plus si l'on définit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 1$ alors :

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Autrement dit la convergence vers le point fixe a est géométrique.

Remarque : La seconde partie du théorème implique que la suite (x_n) converge vers l'unique point fixe a de f .

Avant de donner une démonstration du théorème on va montrer à l'aide de contre-exemples que toutes les hypothèses sont importantes.

Contre-exemple : Si $X =]0, 42]$ et $f : x \mapsto x/5$ alors f est contractante mais n'admet pas de point fixe dans X .

Problème: X n'est pas complet.

Contre-exemple : Si $X = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ alors X est complet mais f n'admet pas de point fixe.

Problème: f n'est pas contractante.

Contre-exemple : Si $X = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ alors X est complet, f est contractante mais sans point fixe.

Problème: $f(X) \not\subset X$.

Contre-exemple : Si (X, d) est un espace métrique complet (non vide et non réduit à un élément) alors $f : x \in X \mapsto x \in X$ admet une infinité de point fixe.

Problème: f n'est pas contractante.

Démonstration : On va commencer par le plus simple qui est l'unicité du point fixe.

Unicité: Supposons que a et b soient deux points fixes de f alors :

$$\|a - b\| = \|f(a) - f(b)\| \leq k\|a - b\|$$

comme $0 < k < 1$ on en déduit que $\|a - b\| = 0$ et donc que $a = b$. Par suite f admet au plus un point fixe.

existence: Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 1$, on va montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

Pour tous $p \geq q$ entiers en utilisant le fait que f est contractante on a :

$$d(x_p, x_q) = d(f^p(x_0), f^q(x_0)) \leq k^q d(f^{p-q}(x_0), x_0) \quad (*)$$

Par inégalité triangulaire et en utilisant l'inégalité précédente on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_0) &\leq d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0) \\ &\leq k^{p-1} d(x_1, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0) \end{aligned}$$

En itérant le procédé on trouve que:

$$d(x_p, x_0) \leq (k^{p-1} + \dots + k + 1) d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Par suite, en utilisant (*) on a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p > q \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \quad (**)$$

ce qui prouve que la suite (x_n) est de Cauchy et comme l'espace X est complet alors la suite (x_n) converge vers une limite que l'on va noter a . Enfin comme $x_{n+1} = f(x_n)$ et que f est continue (car contractante) alors en faisant tendre n vers l'infini on trouve que $a = f(a)$. De plus, en faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité (**), on obtient

$$d(a, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0)$$

ce qui prouve que la convergence est géométrique. ■

On va maintenant montrer une légère amélioration du théorème précédent qui nous dit qu'il suffit qu'une itérée de f soit contractante pour que f admette un point fixe.

Théorème 2 (Sur une itérée de f) :

Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et f une application de X dans lui-même. S'il existe un entier $p \geq 0$ tel que f^p soit contractante alors f admet un unique point fixe qui est la limite de la suite $(f^n(x_0))_{n \geq 1}$ où $x_0 \in X$ est quelconque. De plus la convergence de cette suite est géométrique à partir d'un certain rang.

Comme dans le théorème précédent, toutes les hypothèses sont importantes car on peut utiliser exactement les mêmes contre-exemples pour faire "mentir" le théorème.

Démonstration : Le théorème 1 donne l'existence et l'unicité d'un point a de X tel que $f^p(a) = a$. Mais alors $f(a) = f(f^p(a)) = f^p(f(a))$. Ainsi $f(a)$ est aussi un point fixe de f^p et par unicité on en déduit que $f(a) = a$. Réciproquement si b est un point fixe de f alors b est aussi un point fixe de f^p . Ainsi f possède un unique point fixe (qui est le a précédent).

Notons L_p la constante de lipschitz de l'application f^p . Soit $x_0 \in X$, d'après le théorème 1 on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d(f^{np}(x_0), a) \leq \frac{L_p^n}{1 - L_p} d(x_0, f^p(x_0)).$$

En changeant x_0 par $f^q(x_0)$ pour un entier q on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d(f^{np+q}(x_0), a) \leq \frac{L_p^n}{1 - L_p} d(f^q(x_0), f^{p+q}(x_0)) \quad (*)$$

cette inégalité est vraie pour tous entiers n, q avec $n \geq 1$ et $q \geq 0$. Soit $m \geq p$ alors par division euclidienne on peut écrire m sous la forme $m = np + q$ avec $0 \leq q \leq p - 1$. En particulier $n > \frac{m}{p} - 1$ et en posant $C = \frac{1}{1 - L_p} \max_{0 \leq q \leq p-1} d(f^q(x_0), f^{p+q}(x_0))$ on a :

$$\forall m \geq p, d(f^m(x_0), a) \leq CL_p^{m/p}.$$

Comme C est une constante indépendante de m , on en déduit que la suite des itérés $(f^m(x_0))$ pour un x_0 quelconque converge vers le point fixe a de f . Enfin la vitesse de convergence est géométrique à partir du rang p . ■

Pour conclure cette fiche sur les théorèmes de points fixes dans un espace complet on va énoncer et démontrer une variation du théorème 1 lorsque l'application f a un paramètre.

Théorème 3 (Avec paramètre) :

Soient (X, d) un espace métrique complet non vide, Λ un espace métrique et $F : X \times \Lambda \rightarrow X$ une application continue. On suppose que F est uniformément contractante en x , c'est-à-dire qu'il existe un $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \Lambda, d(F(x, \lambda), F(y, \lambda)) \leq kd(x, y)$$

Alors l'équation $F(x, \lambda) = x$ admet une unique solution $a = a(\lambda)$ qui varie continûment avec le paramètre λ .

Démonstration : Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le théorème 1 appliqué à F avec λ fixé nous donne directement l'existence et l'unicité du point fixe $a(\lambda)$ (car l'application $F(\bullet, \lambda)$ est contractante).

Soient $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ et notons $a = a(\lambda), a' = a(\lambda')$. On a par inégalité triangulaire:

$$d(a, a') = d(F(a, \lambda), F(a', \lambda')) \leq d(F(a, \lambda), F(a', \lambda)) + d(F(a', \lambda), F(a', \lambda')) \quad (*)$$

Comme F est uniformément contractante en x alors :

$$d(F(a, \lambda), F(a', \lambda)) \leq kd(a, a')$$

D'où en injectant dans (*) :

$$(1 - k)d(a, a') \leq d(F(a', \lambda), F(a', \lambda'))$$

Or $k < 1$ et l'application F est continue donc continue par rapport à λ . Par suite l'application $\lambda \mapsto a(\lambda)$ est continue. ■

2 Exercices

Exercice 1 :

Soit (E, d) un espace métrique et $g : E \rightarrow E$ une application contractante.

1. Trouver toutes les fonctions continues $f : E \rightarrow E$ telles que $f = f \circ g$.
2. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x) = f(ax + b)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $|a| < 1$.

Exercice 2 :

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application continue surjective telle que :

$$\exists k > 1 \forall (x, y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \geq kd(x, y)$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe sur E .
2. Pourquoi (avec ce qu'on vient de montrer) la fonction $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 2x + 1 \in \mathbb{R}^+$ n'admet pas de point fixe?

3 Corrections

Exercice 3 :

Soient $I = [a, b]$ un intervalle réel et $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi \in E := C^0(I, \|\bullet\|_\infty)$.

1. Montrer que l'équation intégrale de Fredholm

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)ds, \quad t \in I$$

admet une unique solution $x \in E$ si $(b - a) \max_{s, t \in I} |K(s, t)| < 1$.

2. Montrer que l'équation intégrale de Volterra

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s)ds, \quad t \in I$$

admet toujours une unique solution $x \in E$.

♠ Correction de l'exercice 1.

Question 1. soit $x \in E$ on a $f(x) = f(g(x))$ et appliquant la propriété à $g(x) : f(g(x)) = f(g(g(x)))$. Par récurrence on en déduit donc que pour tout entier n on a $f(x) = f(g^n(x))$. Or g est contractante et E est un espace métrique complet le théorème de point fixe de Picard dit alors que la suite $(g^n(x))_{n \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe de g que l'on va noter a . Par continuité de f on en déduit que $f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x)) = f(a)$. C'est vrai pour tout $x \in E$ et donc f est constante.

Question 2. L'application $x \in R \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$ est contractante car $|a| < 1$. De plus l'ensemble \mathbb{R} muni de sa distance usuelle est complet, la question précédente nous montre que les fonctions recherchées sont les fonctions constantes.

♠ Correction de l'exercice 2.

Question 1. Comme f est surjective alors on peut définir une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 1, x_n = f(x_{n+1})$ et $x_0 \in X$ est quelconque. Mais alors :

$$\forall p, q \in N, p > q \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \left(\frac{1}{k}\right)^q d(f^{p-q}(x_0), x_0)$$

On fait exactement le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 1 pour montrer que la suite (x_n) est de Cauchy (c'est vraie car $0 < \frac{1}{k} < 1$), donc qu'elle converge vers un point a (car X est complet) et par continuité de f que $f(a) = a$.

On a montré que f admettait un point fixe, celui-ci est unique car si $b \in X$ est aussi un point fixe de f alors :

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \geq kd(a, b)$$

comme $k > 1$ on en déduit que $d(a, b) = 0$ et donc que $a = b$. Ainsi f admet un unique point fixe.

Question 2. La fonction f n'est pas surjective! On ne peut donc pas appliquer le résultat de la question précédente.

♠ Correction de l'exercice 3.

Question 1. Posons $F : E \rightarrow E$ telle que $F(x) : t \in I \mapsto \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s)ds$. Il suffit alors de trouver un $x \in E$ tel que $F(x) = x$ pour répondre à la question. On sait

References

[Hor] PIERRE-JEAN HORMIÈRE, *Théorèmes de point fixe : cliquer ici pour le lien*

[Rouv] FRANÇOIS ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel*

que E est complet (non vide) et pour tous $x, y \in E$, tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \left| \int_a^b K(s, t)(x(s) - y(s))ds \right| \\ &\leq (b - a) \|K\|_\infty \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Ce qui montre que F est contractante sur E car $(b - a) \|K\|_\infty < 1$ possède donc un unique point fixe.

Question 2. Posons $F : E \rightarrow E$ telle que $F(x) : t \in I \mapsto \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s)ds$. Il suffit alors de trouver un $x \in E$ tel que $F(x) = x$ pour répondre à la question. On sait que E est complet (non vide) et pour tous $x, y \in E$, tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \left| \int_a^b K(s, t)(x(s) - y(s))ds \right| \\ &\leq (t - a) \|K\|_\infty \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Montrons qu'une itéré de F est contractante. En effet, pour F^2 on a pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} |F^2(x)(t) - F^2(y)(t)| &\leq \left| \int_a^b K(s, t)(x(s) - y(s))ds \right| \\ &\leq \|K\|_\infty \int_a^t |F(x) - F(y)| ds \\ &\leq \|K\|_\infty^2 \int_a^t (s - a) \|x - y\|_\infty ds \\ &\leq \frac{(t - a)^2}{2!} \|K\|_\infty^2 \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Par récurrence sur $p \geq 1$ on montre que pour tout $t \in I$:

$$|F^p(x)(t) - F^p(y)(t)| \leq \frac{((t - a) \|K\|_\infty)^p}{p!} \|x - y\|_\infty$$

Par suite pour tout entier p on a:

$$\|F^p(x) - F^p(y)\|_\infty \leq \frac{((b - a) \|K\|_\infty)^p}{p!} \|x - y\|_\infty.$$

Or le terme $\frac{((b - a) \|K\|_\infty)^p}{p!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini et donc il existe un entier p tel que F^p soit contractante sur E . Par le théorème 2, F possède un unique point fixe ce qui conclut.