Transformation d'Abel

Pré-requis

- Série.
- Intégration par parties.
- Nombre complexe.

1 Analogie discret/continu

La transformation d'Abel[1] peut être vu comme une généralisation du CSSA (Critère Spécial des Séries Alternées[2]) qui peut s'appliquer à des nombres complexes, c'est aussi un équivalent de l'intégration par parties pour des suites. En effet, il existe une analogie entre les sommes discrètes et continues que l'on résume dans le tableau suivant:

Intégrales (sommes continues)	Séries (sommes discrètes)
$x \mapsto f(x)$	$n \mapsto u_n$
$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$	$\displaystyle\sum_{n=p}^{q} u_n$
$f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\dfrac{u_{n+1}-u_n}{(n+1)-n} = u_{n+1}-u_n$
$\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$	$\displaystyle\sum_{n=p}^{q}(u_{n+1}-u_n) = u_{q+1}-u_p$
intégration par parties	transformation d'Abel
f est intégrable sur $[0,+\infty]$	la série $\sum u_n$ est absolument convergente
l'intégrale $\int_0 f$ est semi-convergente	la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Figure 1: Correspondance sommes discrètes et continues

[1] Niels Henrik Abel (1802-1829), mathématicien Norvégien.
[2] On peut le trouver sous le nom de "critère de Leibniz" dans la littérature.

2 Transformation d'Abel

La transformation d'Abel sert à changer l'écriture d'une série afin de pouvoir conclure quant à sa convergence. Si $u_k = a_k b_k$, on pose $A_k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} a_l$ et alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$$

On voit directement le lien avec l'intégration par parties car le terme A_k correspond à la "primitive discrète" de a_k et $(b_k - b_{k+1})$ à la "dérivé discrète" de b_k, on a également les termes de bord à savoir $a_0 b_0 + A_n b_n = A_0 b_0 + A_n b_n$. Cependant il faut faire attention aux différents signes (qui ne correspondent pas forcément à ceux de l'intégration par parties), au terme $A_0 b_1$ qu'il ne faut pas oublier et aux bornes de sommations.
On en déduit le théorème suivant:

Théorème 1 (critère de convergence d'Abel) :
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes vérifiant:

- *La suite (A_n) définie par $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée.*
- *La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |b_k - b_{k+1}|$ est convergente.*
- *La suite (b_n) tend vers 0.*

alors la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ est convergente.

Démonstration : En utilisant la transformation d'Abel on en déduit la convergence de la série car le terme $A_n b_n$ tend vers 0 (d'après la première et troisième hypothèse) et que la série $\sum_{k\geq 1} A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument (d'après la première et seconde hypothèse) donc converge. Par suite la série $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ est convergente. ∎

Remarque : En adaptant les notations on voit que le critère de convergence d'Abel est encore utilisable dans un espace de Banach. En effet, on a juste utilisé le fait que l'espace ambiant (ici $\mathbb{C}$) possède une norme et que toute série absolument convergente est convergente.

3 Applications

Exercice 1 (♡♡) :
Les séries dont le terme général est : $\frac{e^{in\theta}}{n}$ *où* $\theta \in [0, 2\pi[$; $\frac{\cos(n)}{n}$ *et* $\frac{\sin(n)}{n}$ *sont-elles convergentes?*

Exercice 2 :

1. *Démontrer le critère de convergence des séries de Dirichlet donné ci-dessous :*
   Soit (a_n) *une suite de nombres complexes et* (b_n) *une suite de nombres réels vérifiant:*
   - *La suite* (A_n) *définie par* $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée.*
   - *La suite* (b_n) *est monotone.*
   - *La suite* (b_n) *tend vers* 0.

   Alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ *est convergente.*
2. *En déduire le CSSA que l'on rappelle : Soit* (u_n) *une suite de nombres réels telle que la suite* $(|u_n|)$ *tend en décroissant vers* 0 *et que la suite* $(u_n u_{n+1})$ *est strictement négative, alors la série de terme général* u_n *est convergente.*

4 Corrections

♠ Correction de l'exercice 1.
Si $\theta = 0$ alors pour tout entier n on a $\frac{e^{in\theta}}{n} = \frac{1}{n}$ et donc la série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n}$ diverge. Sinon $\theta \neq 0$, on va appliquer le critère d'Abel avec $(a_n) = (\frac{e^{in\theta}}{n})$ et $(b_n) = (\frac{1}{n})$. En effet, la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0 et la série $\sum_{k\geq 1} |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}|$ converge vers 1. Enfin on a $A_n := \sum_{k=1}^{n} e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta} - 1 + e^{in\theta}}{2 - 2\cos(\theta)}$ et donc pour tout entier n on a $|A_n| \leq \frac{4}{2-2\cos(\theta)}$. On peut donc appliquer le critère de convergence d'Abel et donc la série est convergente.
Pour la série de terme général $\frac{\cos(n)}{n}$ (resp. $\frac{\sin(n)}{n}$) on procède de la même façon ou alors on peut remarquer que c'est la partie réelle (resp. imaginaire) de la série de terme général $\frac{e^{i\theta}}{n}$. D'après ce qui précède cette série converge.

♠ Correction de l'exercice 2.

Question 1. En utilisant la transformation d'Abel on en déduit la convergence de la série car le terme $A_n b_n$ tend vers 0 (d'après la première et troisième hypothèse) et que la série $\sum_{k\geq 1} A_k(b_k - b_{k+1})$ converge absolument donc converge! En effet, d'après la première hypothèse si l'on note C un majorant de la suite (A_n) on a pour tout entier n : $\sum_{k\geq 1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq C \sum_{k\geq 1}^{n} |b_k - b_{k+1}|$. Or $C \sum_{k\geq 1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = C|b_1 - b_{n+1}|$ car la suite (b_n) est soit décroissante vers 0 soit croissante vers 0 d'après la seconde et troisième hypothèse. Ainsi pour tout entier n : $\sum_{k\geq 1}^{n} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq 2C|b_1|$ d'où la convergence absolue.
Par suite la série $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ est convergente.

Question 2. Quitte à changer la suite (u_n) en $(-u_n)$ on peut supposer que u_0 est strictement négatif (u_0 n'est pas nul car $u_0 u_1 < 0$).
De la seconde hypothèse on en déduit que pour tout entier n on a $u_n = (-1)^n |u_n|$. Or la suite $(|u_n|)$ est monotone, tend vers 0 et la suite A_n définie par $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n$ est bornée. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente par le critère de Dirichlet (avec $(a_n) = ((-1)^n)$ et $(b_n) = (|u_n|)$).

Remarque : On peut aussi démontrer le CSSA avec des suites adjacentes ce qui permet d'obtenir une majoration du reste d'une telle série.