TER de L3 : Identité de Kesava Menon et congruences de Ramanujan.

Dorian Perrot
Sous la direction de J.Riou.

Université Paris-Saclay

Année 2020/2021

Table des matières

Table des matières

Identité de Kesava Menon

Identité de Kesava Menon

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_n} (k-1) \wedge n = \varphi(n)\tau(n)$$

Avec :

- $\mathbb{U}_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ qui désigne l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $a \wedge b$ qui désigne le pgcd de a et de b .
- φ qui désigne la fonction indicatrice d'Euler.
- τ qui désigne la fonction nombre de diviseurs.

Fonction multiplicative

Définition

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si pour tous entiers n, m premiers entre eux on a : $f(mn) = f(m)f(n)$.

Exemples :

- La fonction φ est multiplicative (théorème des restes chinois).
- La fonction τ est multiplicative ($\tau(p^n) = n + 1$).

Fonction multiplicative

Définition

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si pour tous entiers n, m premiers entre eux on a : $f(mn) = f(m)f(n)$.

Exemples :

- La fonction φ est multiplicative (théorème des restes chinois).
- La fonction τ est multiplicative $(\tau(p^n) = n + 1)$.

Intérêt

Si on connait une fonction multiplicative sur toute les puissances de nombres premiers alors on la connait entièrement.

Lemme

La fonction $F : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$ définie par $F(n) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_n} (k-1) \wedge n$ est multiplicative.

Soit $a \wedge b = 1$. On note $\overline{k_1} = \overline{k} \pmod{a}$ et $\overline{k_2} = \overline{k} \pmod{b}$.

$$\begin{aligned} F(ab) &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} (k-1) \wedge ab \\ &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} ((k-1) \wedge a) \cdot ((k-1) \wedge b) \end{aligned}$$

Lemme

La fonction $F : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$ définie par $F(n) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_n} (k-1) \wedge n$ est multiplicative.

Soit $a \wedge b = 1$. On note $\overline{k_1} = \overline{k} \pmod{a}$ et $\overline{k_2} = \overline{k} \pmod{b}$.

$$\begin{aligned} F(ab) &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} (k-1) \wedge ab \\ &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} ((k-1) \wedge a) \cdot ((k-1) \wedge b) \\ &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} ((k_1-1) \wedge a) \cdot ((k_2-1) \wedge b) \end{aligned}$$

Lemme

La fonction $F : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}$ définie par $F(n) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_n} (k-1) \wedge n$ est multiplicative.

Soit $a \wedge b = 1$. On note $\overline{k_1} = \overline{k} \pmod{a}$ et $\overline{k_2} = \overline{k} \pmod{b}$.

$$\begin{aligned}
F(ab) &= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} (k-1) \wedge ab \\
&= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} ((k-1) \wedge a) \cdot ((k-1) \wedge b) \\
&= \sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_{ab}} ((k_1-1) \wedge a) \cdot ((k_2-1) \wedge b) \\
&= \left(\sum_{\overline{k_1} \in \mathbb{U}_a} ((k_1-1) \wedge a \right) \left(\sum_{\overline{k_2} \in \mathbb{U}_b} ((k_2-1) \wedge b \right) \\
&= F(a)F(b)
\end{aligned}$$

Identité de Kesava Menon

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} (k-1) \wedge n = \varphi(n)\tau(n)$$

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} (k-1)\wedge p^a = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \\ p|k}} \underbrace{(k-1)\wedge p^a}_{=1} = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + p^{a-1}$$

Identité de Kesava Menon

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} (k-1)\wedge n = \varphi(n)\tau(n)$$

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} (k-1)\wedge p^a = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \\ p|k}} \underbrace{(k-1)\wedge p^a}_{=1} = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + p^{a-1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} (k-1)\wedge p^a &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} k\wedge p^a \\ &= p^a + \sum_{i=1}^{a-1}(p^i - p^{i-1})p^{a-i} + \varphi(p^a)\end{aligned}$$

Identité de Kesava Menon

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} (k-1)\wedge n = \varphi(n)\tau(n)$$

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} (k-1)\wedge p^a = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z} \\ p|k}} \underbrace{(k-1)\wedge p^a}_{=1} = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}} (k-1)\wedge p^a + p^{a-1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} (k-1)\wedge p^a &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} k\wedge p^a \\ &= p^a + \sum_{i=1}^{a-1}(p^i - p^{i-1})p^{a-i} + \varphi(p^a) \\ &= (a-1)(p^a - p^{a-1}) + 2p^a - p^{a-1}\end{aligned}$$

Identité de Kesava Menon

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}(k-1)\wedge n=\varphi(n)\tau(n)$$

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}}(k-1)\wedge p^a=\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}}(k-1)\wedge p^a+\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}\\ p|k}}\underbrace{(k-1)\wedge p^a}_{=1}=\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}}(k-1)\wedge p^a+p^{a-1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}}(k-1)\wedge p^a &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}} k\wedge p^a\\ &= p^a+\sum_{i=1}^{a-1}(p^i-p^{i-1})p^{a-i}+\varphi(p^a)\\ &= (a-1)(p^a-p^{a-1})+2p^a-p^{a-1}\end{aligned}$$

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_{p^a}}(k-1)\wedge p^a=(a+1)(p^a-p^{a-1})=\tau(p^a)\varphi(p^a)$$

Une généralisation

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathbb{Z}[X]$ alors :

$$\sum_{\overline{k} \in \mathbb{U}_n} (f(k) \wedge n) = \varphi(n) \cdot \sum_{d|n} \#\{r \in \mathbb{U}_d, f(r) = 0 \pmod d\}$$

En prenant le polynôme $f(X) = X - 1$, on retrouve exactement l'identité de Kesava Menon.

Produit de convolution

Définition : produit de convolution ($*$)

Soit, f, g des fonctions de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{C}$. La loi $*$ est définie par :

$$f * g : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)g(b) \in \mathbb{C}$$

Propriété de $*$:

- $*$ est commutative
- $*$ est associative
- Si f, g sont multiplicatives alors $f * g$ l'est aussi.

Relations fonctionnelles

Fonctions particulières

- $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.
- *id* la fonction identité.
- χ_1 la fonction tel que $\chi_1(1) = 1$ et pour tout $n > 1, \chi_1(n) = 0$.
- μ la fonction multiplicative telle que $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ (p premier) et $\mu(p^k) = 0$ si $k > 1$.

Relations fonctionnelles

Fonctions particulières

- $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.
- *id* la fonction identité.
- χ_1 la fonction tel que $\chi_1(1) = 1$ et pour tout $n > 1, \chi_1(n) = 0$.
- μ la fonction multiplicative telle que $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ (p premier) et $\mu(p^k) = 0$ si $k > 1$.

Remarques

- χ_1 est l'élément neutre de $*$
- $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$
- $\sigma = id * 1$

Relations fonctionnelles

Fonctions particulières

- $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.
- *id* la fonction identité.
- χ_1 la fonction tel que $\chi_1(1) = 1$ et pour tout $n > 1, \chi_1(n) = 0$.
- μ la fonction multiplicative telle que $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ (p premier) et $\mu(p^k) = 0$ si $k > 1$.

Remarques

- χ_1 est l'élément neutre de $*$
- $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$
- $\sigma = id * 1$

Pour la démonstration

- $\chi_1 = \mathbf{1} * \mu$ (inversion de Möbius)
- $\varphi * \mathbf{1} = id$ (identité d'Euler)
- $\varphi = id * \mu$
- $id = (id * \mu) * \mathbf{1}$

Idée démonstration

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}(f(k)\wedge n) = \varphi(n)\cdot\sum_{d|n}\#\{r\in\mathbb{U}_d, f(r)=0 \pmod d\}$$

De $\varphi * \mathbf{1} = id$ appliquée à $f(k)\wedge n$, on en déduit que : $f(k)\wedge n = \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)$.

Idée démonstration

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}(f(k)\wedge n)=\varphi(n)\cdot\sum_{d|n}\#\{r\in\mathbb{U}_d, f(r)=0 \pmod d\}$$

De $\varphi * \mathbf{1} = id$ appliquée à $f(k)\wedge n$, on en déduit que : $f(k)\wedge n = \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)$.

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} f(k)\wedge n = \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}\sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)$$

Idée démonstration

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}(f(k)\wedge n)=\varphi(n)\cdot\sum_{d|n}\#\{r\in\mathbb{U}_d, f(r)=0 \pmod d\}$$

De $\varphi * \mathbf{1} = id$ appliquée à $f(k)\wedge n$, on en déduit que : $f(k)\wedge n = \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)$.

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} f(k)\wedge n &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}\sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)\\ &= \sum_{d|n}\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{U}_n\\ d|f(k)}}\varphi(d)\end{aligned}$$

$$\{(\overline{k}, d)\in\mathbb{U}_n\times D(n), d|f(k)\}$$

Idée démonstration

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}(f(k)\wedge n)=\varphi(n)\cdot\sum_{d|n}\#\{r\in\mathbb{U}_d, f(r)=0 \pmod d\}$$

De $\varphi * \mathbf{1} = id$ appliquée à $f(k)\wedge n$, on en déduit que : $f(k)\wedge n = \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)$.

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} f(k)\wedge n &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n}\sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}}\varphi(d)\\ &= \sum_{d|n}\sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{U}_n\\ d|f(k)}}\varphi(d)\\ &= \sum_{d|n}\varphi(d)\#\{\overline{k}\in\mathbb{U}_n, f(k)=0 \pmod d\}\end{aligned}$$

$\{(\overline{k},d)\in\mathbb{U}_n\times D(n), d|f(k)\}$

$$\begin{tikzcd}\mathbb{U}_n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{U}_d \\ \mathbb{U}_n/ker(\pi) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Idée démonstration

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} (f(k)\wedge n) = \varphi(n)\cdot \sum_{d|n} \#\{r \in \mathbb{U}_d, f(r) = 0 \pmod d\}$$

De $\varphi * \mathbf{1} = id$ appliquée à $f(k)\wedge n$, on en déduit que : $f(k)\wedge n = \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}} \varphi(d)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} f(k)\wedge n &= \sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} \sum_{\substack{d|f(k)\\ d|n}} \varphi(d)\\
&= \sum_{d|n} \sum_{\substack{\overline{k}\in\mathbb{U}_n\\ d|f(k)}} \varphi(d)\\
&= \sum_{d|n} \varphi(d)\#\{\overline{k}\in\mathbb{U}_n, f(k) = 0 \pmod d\}\\
&= \sum_{d|n} \varphi(d)\frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}\#\{\overline{l}\in\mathbb{U}_d, f(l) = 0 \pmod d\}
\end{aligned}$$

$\{(\overline{k}, d) \in \mathbb{U}_n \times D(n), d|f(k)\}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U}_n \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d] & & \mathbb{U}_d \\
\mathbb{U}_n/ker(\pi) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Table des matières

Énoncé

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, une partition de n consiste en la donnée d'un entier naturel l et d'un l-uplet $(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ d'entiers strictement positifs tels que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_l$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_l = n$.
On note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. $p(n) = 0$ pour $n < 0$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Énoncé

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$, une partition de n consiste en la donnée d'un entier naturel l et d'un l-uplet $(a_1, a_2, \cdots, a_l)$ d'entiers strictement positifs tels que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_l$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_l = n$.
On note $p(n)$ le nombre de partitions de l'entier n. $p(n) = 0$ pour $n < 0$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Congruence de Ramanujan

Pour tout entier naturel k, on a :

$$p(5k+4) \equiv 0 \pmod 5$$

Ingrédient 1

Définitions

- $\Phi_{r,s} = \sum_{m\geq 1, n\geq 1} m^r n^s X^{mn} \in \mathbb{Z}[[X]]$
- $h : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. Notons H sa série de Taylor en 0. $H = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.
- $S_n := \Phi_{0,n} - \frac{B_{n+1}}{2n+2} \in \mathbb{Q}[[X]]$.

Ingrédient 1

Définitions

- $\Phi_{r,s} = \sum_{m\geq 1, n\geq 1} m^r n^s X^{mn} \in \mathbb{Z}[[X]]$
- $h : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{e^x-1}$. Notons H sa série de Taylor en 0. $H = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.
- $S_n := \Phi_{0,n} - \frac{B_{n+1}}{2n+2} \in \mathbb{Q}[[X]]$.

Séries P, Q, R

$$P := -24S_1 = 1 - 24\Phi_{0,1}$$
$$Q := 240S_3 = 1 + 240\Phi_{0,3}$$
$$R := -504S_5 = 1 - 504\Phi_{0,5}$$

$\Longrightarrow$

Relations

$$1 + 480\Phi_{0,7} = Q^2$$
$$288\Phi_{1,2} = Q - P^2$$
$$720\Phi_{1,4} = PQ - R$$
$$1008\Phi_{1,6} = Q^2 - PR$$

Ingrédient 2

Série formelle f

On pose $f := \prod_{n=1}^{\infty}(1 - X^n)$.

- $f = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} (-1)^k X^{g_k}$ avec $g_k = \dfrac{k(3k-1)}{2} \in \mathbb{N}^*$
- $\dfrac{1}{f} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n$

Idée générale

Étape 1

$$Q^3 - R^2 = 1728Xf(X)^{24}$$

Étape 2

$$Q^3 - R^2 \equiv Q - P^2 \equiv 288\Phi_{1,2} \pmod 5$$

$$f(X)^{25} \equiv f(X^{25}) \pmod 5$$

Idée générale

Étape 1

$$Q^3 - R^2 = 1728Xf(X)^{24}$$

Étape 2

$$Q^3 - R^2 \equiv Q - P^2 \equiv 288\Phi_{1,2} \pmod 5$$

$$f(X)^{25} \equiv f(X^{25}) \pmod 5$$

Étape 3

$$Q^3 - R^2 \equiv 1728X\frac{f(X)^{25}}{f(X)} \pmod 5$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma(n)X^n \equiv \left(X + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}(-1)^k X^{25g_k+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n\right) \pmod 5$

Idée générale

Étape 1

$$Q^3 - R^2 = 1728Xf(X)^{24}$$

Étape 2

$$Q^3 - R^2 \equiv Q - P^2 \equiv 288\Phi_{1,2} \pmod 5$$

$$f(X)^{25} \equiv f(X^{25}) \pmod 5$$

Étape 3

$$Q^3 - R^2 \equiv 1728X\frac{f(X)^{25}}{f(X)} \pmod 5$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma(n)X^n \equiv \left(X + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (-1)^k X^{25g_k+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n\right) \pmod 5$$

Étape 4

$$0 \equiv p(5m-1) + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (-1)^k p(5m-1-25g_k) \pmod 5$$

$$p(5m-1) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (-1)^{k+1} p(5m-1-25g_k) \pmod 5$$

Table des matières

K.Menon par la théorie des groupes

$$\sum_{\overline{k}\in\mathbb{U}_n} (k-1)\wedge n = \varphi(n)\tau(n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on fait agir le groupe $\mathbb{U}_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $(k,a) \in \mathbb{U}_n \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longmapsto ka \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La formule de Burnside donne alors :

$$\#\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Big/ \mathbb{U}_n\right) = \frac{1}{\#\mathbb{U}_n}\sum_{k\in\mathbb{U}_n} \#\,\mathrm{Fix}\,(k)$$

- $\#\mathbb{U}_n = \varphi(n)$
- $\#\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Big/ \mathbb{U}_n\right)$ (nombre d'orbites pour l'action) :

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Big/ \mathbb{U}_n &\to \{\text{diviseurs de } n\}\\ \omega(x) &\mapsto \# < x >\end{aligned}$$

- $\mathrm{Fix}(k) = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; (k-1)x = 0\}$. On a : $x \in \mathrm{Fix}(k) \Leftrightarrow x \in < \frac{n}{(k-1)\wedge n} >$.

Relations fonctionnelles

B_n et cotan

- $\dfrac{\theta}{2}\,\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{B_{2n}\theta^{2n}}{(2n)!}$
- $\left(\dfrac{\theta}{2}\,\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)^2 = 1 - \dfrac{\theta^2}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{B_{2n}\theta^{2n}}{(2n)(2n-2)!}$

Les C_n

$$\left(\frac{1}{4}\,\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)X^n}{1-X^n}\right)^2 = \frac{1}{16}\,\text{cotan}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n\in\mathbb{N}}\cos(n\theta)C_n$$

- $C_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{(1-X^n)^2} = \frac{1}{2}\Phi_{1,0} = \frac{1}{2}\Phi_{0,1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nX^n}{1-X^n}$
- Pour tout $n \geq 1,\ C_n = \dfrac{X^n}{(1-X^n)^2} - \dfrac{nX^n}{2(1-X^n)}$

Relations entre les S_n

Relation

$$\frac{n+3}{2(n+1)} S_{n+1} - \Phi_{1,n} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \text{ impairs}}} \binom{n}{i} S_i S_j$$

Utiliser :

$$\left(\frac{1}{4} \operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta) X^n}{1 - X^n} \right)^2 = \frac{1}{16} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n \cos(n\theta)}{(1-X^n)^2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n X^n}{1 - X^n} (1 - \cos(n\theta)) \right)$$

$Q^3 - R^2 = 1728Xf(X)^{24}$

$X\,\mathrm{dlog}()$

Soit $P \in \mathbb{Q}[[X]]$ et $P \neq 0$.

Si $\mathrm{val}(P) = 0$, on note $\mathrm{dlog}(P) := \dfrac{P'}{P}$.

Sinon, on peut noter $X\,\mathrm{dlog}(P) := n + X\,\mathrm{dlog}(\widetilde{P})$ où $P = X^n\widetilde{P}$ avec $n = \mathrm{val}(P)$ et $\mathrm{val}(\widetilde{P}) = 0$. On a alors $P \cdot X\,\mathrm{dlog}(P) = P' \cdot X$.

- $X\,\mathrm{dlog}(Q^3 - R^2) = \dfrac{X \cdot 3Q'Q - X \cdot 2R'R}{Q^3 - R^2} \overset{(*)}{=} \dfrac{Q^2(PQ - R) - R(PR - Q^2)}{Q^3 - R^2} = P$
- $X\,\mathrm{dlog}(Xf(X)^{24}) = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24nX^n}{1 - X^n} = 1 - 24\Phi_{0,1} = P$

Table des matières

Bibliographie

- László Tóth, *Menon's identity and arithmetical sums representing functions of several variables*, 2011.
- M.Richards, *A remark on the number of cyclic subgroups of a finite group, Amer. Math. Monthly 91*, 1984.
- P.Haukkanen et J.Wang, *A generalization of Menon's identity with respect to as set of polynomials, Portugaliae Mathematica 53*, 1996.
- V.Sita Ramaiah, *Arithmetical sums in regular convolutions*, 1978.
- J.Riou, *Feuille d'exercice n°3 cours de Combinatoire algébrique (Mag306)*, Année universitaire 2020/2021.
- S.Ramanujan, *On certain arithmetical functions, Transactions of the Cambridge Philosophical Society XXII, NO.9*, 1916
- S.Ramanujan, *Congruence properties of partitions*, 1921