Préparation à l'agrégation :

Méta-plans pour l'oral

Dorian Perrot

ENS Rennes
Université Rennes 1

Année universitaire 2022/2023

Liste des méta-plans :

105 - Groupes des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Motivation: Le groupe symétrique a été introduit pour étudier les racines d'un polynôme (début de la théorie de Galois). Le groupe des permutations permet également d'introduire la notion d'action de groupe. Enfin le théorème de Cayley qui dit que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique justifie le fait que l'étude des groupes des permutations est très étudié.

I Généralités sur le groupe symétrique

Définition et action de groupe

Def Le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est le groupe des permutations de E. [Rom01]

Prop Si E te F sont deux ensembles non vides en bijection alors $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ sont en bijection. [Rom01]

Rq On note $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}([1,n])$ et on peut donc se restreindre à cet ensemble.

Prop $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}([1,n])$ est de cardinal $n!$ [Rom01].

Thme De Cayley [Per04] (+ rq disant que ça ne sert pas à grand chose).

Def Action de groupe et le lien avec le groupe symétrique [Per04].

Ex Action de $\mathfrak{S}_3$ sur les sommets d'un triangle

Ex L'ensemble des permutations laissant stable un point est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Support et orbites d'une permutation

Def D'un cycle et d'une transposition (+ un exemple) [Rom01]

Lem La formule $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (\tau(x_1), \cdots, \tau(x_r))$ [Rom01].

App On en déduit que deux cycles sont conjugués entre eux SSI ils sont de même longueur.

Def Orbite d'une permutation et d'un élément [Rom01]

Rq Les orbites sont deux à deux distinctes et forment une partition de E. Ce sont donc des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ y = \sigma^k(x))$ [Rom01].

Def Support d'une permutation [Rom01].

Prop $\sigma(Supp(\sigma)) = Supp(\sigma)$; $Supp(\sigma)) = Supp(\sigma^{-1})$, $Supp(\sigma^r)) \subset Supp(\sigma)$ et que deux cycles à support disjoints commutent. [Rom01]

CE La réciproque du dernier point est fausse (σ, σ^{-1})

App L'odre d'une permutation (sous forme de produit de cycles à support disjoints) et le ppcm des longueurs des cycles. [Rom01].

Générateurs

Thme Toute permutation se décompose en produit de cycle à support disjoint [Rom01] + donner un exemple

App On peut en déduire les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}([1,n])$.

Prop Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ [Rom01]

Prop $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(1,k)$, les transpositions $(k,k+1)$ et par $(1,2)$ avec $(1,2,\cdots,n$ [Rom01]

Rq Pour connaitre un morphisme de $\mathfrak{S}_n$, il suffit de connaitre ses valeurs sur les transpositions.

Rq Le générateur $(1,2)$ avec $(1,2,\cdots,n)$ est utile en informatique.

App Si $n \geq 3$ alors $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$.

II Le groupe alterné

Signature

Def La signature notée ϵ est l'unique morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$. [Rom01]

Coro $\epsilon(\tau) = -1$ et $\epsilon(r - cycle) = (-1)^{r-1}$ + cas général pour une décomposition. [Rom01]

Prop Le cardinal du noyau de ϵ est $\frac{n!}{2}$.

Prop $\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{j-i}$. [Rom01]

Ex Terminer par un exemple, celui du [Rom01] par exemple.

Groupe alterné

Def Le groupe alterné est l'ensemble des permutations paires, i.e. le noyau de ϵ. On le note $\mathfrak{A}(E)$ [Rom01].

Prop Comme $\mathfrak{A}_n$ est d'indice 2 alors il est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.

Prop Pour $n \geq 3$ le groupe $\mathfrak{A}(E)$ est engendré par les produits de deux transpositions; les 3-cycles. [Rom01].

Prop Les cycles d'ordre 3 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ [Per04].

CE C'est faux si $n \leq 4$. [Per04].

DEV Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$ et $n = 3$. [Rom01].

App Pour $n \geq 5$ les sous-groupes distingué de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{id\}, \mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$.

III Application

Déterminant

Def Forme n-linéaire antisymétrique + forme n-linéaire alternée [Rom01]

Prop Si $car(\mathbb{K}) \neq 2$ alors forme antisymétrique = forme alternée [Rom01]

Def Du déterminant comme l'unique forme n-linéaire alternée. Et def/lien avec la grosse formule du déterminant. [Rom01]

Ex $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$ [Rom01]

Polynômes symétrique

Def Polynôme symétrique, polynôme symétrique élémentaire [QQ17]

Thme Théorème de décomposition des polynômes symétriques [QQ17]

App Formules de Vietes [QQ17]

Def Définition et propriétés sur les polynômes cyclotomiques (pour le dev) [QQ17] (démo dans [Per04])

DEV Théorème de Kronecker. [QQ17]

Isomorphismes execptionnels

- Les isomorphismes de la forme $PSL(2, \mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$, $PGL(2, \mathbb{F}_4) \simeq PSL(2, \mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$, [Per04] et [CG13].

149 - Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

<u>Motivation:</u> Trouver et étudier les éléments propres à pour but de simplifier les problèmes et les études. En effet, il s'agit de trouver et d'étudier des axes privilégiés selon lequels une application se comporte comme une dilatation.

On pourrait parler d'éléments propres pour des opérateurs en général mais on va se limiter au cadre de la dimension finie (car c'est le cadre le plus utilisé en pratique) et donc identfier les endomorphismes à des matrices[1].

I Généralités et calculs exactes.

Définition et premières propriétés

Def Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces caractéristiques [Rom19a] (chap 1) ou [Gou04a].

Ex Matrice de rotation (du plan) qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$ + ses sous-espaces caractéristiques (+rq cet exemple met en lumière l'importance du corps considéré).

Calculs exacts

Def Polynôme caractéristique [Gou04a] (+rq disant que c'est "bien défini" pour les endomorphismes (ne pas oublier que ça reste les objets d'étude de cette leçon)).

Prop Les racines du polynômes caractéristiques sont les valeurs propres de la matrice [Gou04a]

Def D'une matrice diagonalisable [Gou04a]

Ex Donner une symétrie dans le plan réel[2].

(Rq) La matrice de changement de base (d'une matrice diagonalisable) permet d'obtenir des vecteurs propres.

Thme Théorème spectral [Gou04a]

App Les matrices A^*A sont diagonalisables à valeur propres réelles (appelé valeurs singulières de A et c'est utile pour le rayon spectral).

Ex Donner une matrice 2x2 symétrique réelle et faire un dessin sur comment elle agit sur le plan pour faire le lien avec l'introduction.

Exemples de calculs

Ex Matrice circulante [IP19].

DEV Suite de polygone [IP19].

Ex Matrice d'ordre fini [IP19].

App Théorème de Burnside [IP19].

II Normes de matrices

rayon spectral

Def Norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle [Rom19a] (chap 3.1).

Ex Cas particulier pour la norme 2 et infinie [Rom19a] (chap 3.1).

Thme Les propriétés des normes subordonnées [Rom19a] (chap 3.1) + les remarques en fin de chapitre.

App L'exponentielle matricielle est bien définie.

Def Du rayon spectral [Rom19a] (chap 3.4).

Ex Expression dans le cas de la norme 2 [Rom19a] (chap 3.4).

Lem On a $\rho(A) \leq |||A|||$ quelque soit la norme subordonnée [Rom19a] (chap 3.4). + rq cela donne un interval où l'on peut rechercher les valeurs propres.

Def Explication du principe de la méthode itérative pour un système linéaire (principe + définition de la suite pour introduire le DEV). [Rom19a] (chap 5.11).

Lem Pour tout ε il existe une norme subordonnée telle que $|||A||| \leq \varepsilon + \rho(A)$. [Rom19a] (chap 3.4).

DEV Méthode itérative pour la résolution d'un système linéaire [IP19].

[1] On va étudier seulement les matrices mais savoir motiver ce choix si le jury demande.
[2] Attention le jury peut alors demander si c'est vrai pour tout corps et la réponse et non, il y a juste un problème en caractéristique 2.

Conditionnement

Prop Sur la majoration de l'erreur sur un système [Rom19a] (chap 3.5).

Def Définition du conditionnement selon une norme [Rom19a] (chap 3.5).

Prop Exemples des propriétés du conditionnement [Rom19a] (chap 3.5).

Ex Expression du conditionnement pour la norme 2 + un exemple numérique + cas des matrices normales [Rom19a] (chap 3.5).

App Matrice de Hilbert + rq sur son rayon spectral et dire qu'on les utilise dans la vie courante [IP19].

III Calculs approchés

Localisation

Prop Disques de Gerschgörin-Hadamard [Rom19a] (chap 1.2). (+rq disant qu'il y au moins une valeur propre dans chacune des composantes connexes de l'ensemble des disques fermés[3])

(Prop) Amélioration avec le théorème D'Ostrowski (il faut introduire des notations et je n'ai pas d'application). [Rom19a] (chap 1.2).

App Localiser le spectre d'une matrice stochastique [Rom19a] (page 142 et point 5 page 126).

Lem Formule de Kronecker (analyse complexe) [BMP05] (démo dans [QQ17] ou [Rud20]).

Thme Théorème de Rouche [BMP05] (démo dans [QQ17] ou [Rud20]).

Ex Donner l'exemple dans le [BMP05] pour le nombre de racines d'un polynôme.

Méthodes itératives

Prop Méthode de la puissance itérée [Rom19a] (chap 6).

Rq Méthode de la puissance inverse [Rom19a] (page 212).

(Prop) Méthode QR [Cia06].

Prop Méthode de Givens-Householder (surtout le lemme 6.9) [Rom19a] (chap 6).

IV Remarques

- On peut rajouter du cours d'option sur la localisation des racines d'un polynôme si besoin.
- Dans la partie I on peut être rapide et ne pas parler du polynome minimal, des conditions pour être diagonalisable etc... Si besoin le jury demandera. Il faut donc être à l'aise dessus.
- Attention, l'exemple avec la matrice stochastique ouvre la porte à des théorèmes/théories plus compliquées (qui pourraient être un partie du plan sur les matrices strictement positives). On peut être rapidement amené à parler du théorème de Perron-Frobenius et de ses conséquences pour trouver des vecteurs propres, résultats sur l'unicité etc... Regarder [Rom19a] (chap 4.2 à 4.5) pour être (vraiment) au top sur le thème.
- S'il y a du temps, pour ne pas finir sur une proposition, essayer de faire un exemple pour la méthode de la puissance itérée ou de Givens-Householder.

[3] Se démontre avec de l'analyse complexe et théorème des résidus, pas de référence mais sympas à savoir.

155 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Motivation: En théorie de la réduction, la diagonalisabilité est le cas optimal dans le sens où l'on ne peut pas simplifier d'avantage une matrice ou l'expression d'un endomorphisme (dans une base à trouver). C'est très utile pour simplifier et résoudre des problèmes mathématiques ou informatique. Nous allons étudier ce que signifie le fait d'être diagonalisable, les conditions pour l'être et des applications.

$\mathbb{K}$ un corps; E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. On procède à l'identification $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I Définitions et premières propriétés

Éléments propres

Def Valeur propre, vecteur propre, spectre de f et sous-espace propre de f associé à une valeur propre [Gou04a]

Rq Un sous-espace propre de f est f-stable.

Ex le spectre de l'endomorphisme rotation d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ est vide. Si p est un projecteur alors ses valeurs propres sont 0 ou 1.

Pro Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres $E_1, \cdots, E_p$ sont en somme directe. [Gou04a]

Polynômes d'endomorphismes et idéal annulateur

Def Polynôme d'endomorphisme : $P(f) := \sum_{i=0}^{m} a_i f^i \in \mathcal{L}(E)$. [Gou04a]

Def+Pro L'application $\psi_f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(f) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. Son image ($=_K [f]$) est l'algèbre des polynômes en f. Son noyau (=idéal annulateur de f) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à (0), il est engendré par un polynôme unitaire π_f qu'on appelle polynôme minimal de f. [Gou04a]

Ex f nilpotent d'indice r, $\pi_f = X^r$; f projecteur ($\neq$ *id*) alors $\pi_f = X^2 - X$; f symétrie ($\neq \pm$*id*) alors $\pi_f = X^2 - 1$.

Rq Comme $(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$ alors π_M est invariant par similitude. De plus $\ker(\psi_f)$ et $Im(\psi_f)$ sont stables par f.

Th Lemme de décomposition des noyaux + rq disant que les projections sur les noyaux sont des polynômes en f (si $f = P_1 \cdots P_r$) [Gou04a]

Ex Si $car(\mathbb{K}) \neq 2$ alors f projecteur ($\neq$ *id*) et symétrie ($\neq \pm$*id*).

Pro Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors λ valeur propre de f SSI $\pi_f(\lambda) = 0$ [Gou04a]

Cor Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors π_f est scindé et donc $\mathrm{Spec}(f) \neq \emptyset$ (attention c'est faux en dimension infinie $E = \mathbb{C}[X]$ et $f(P) = XP$

Polynôme caractéristique

Def Du polynôme caractéristique d'une matrice A. [Gou04a]

Rq $\chi_A = \chi_{{}^tA}$, $\deg(\chi(A)) = n$ et $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$. Enfin deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Def Le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E ne dépend par de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle polynôme caractéristique de f. [Gou04a]

Th Théorème de Cayley-Hamilton [Gou04a].

Cor $\chi_f \in \pi_f \mathbb{K}[X]$ donc $\deg(\pi_f) \leq \deg(\chi_f) = n$.

Pro $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$ [Gou04a]

Pro F s.e.v strict de E stable par f. Soit $g := f_{|F}$ alors $g \in \mathcal{L}(F)$ et χ_g divise χ_f [Gou04a]

Cor λ racine de χ_f d'ordre de multiplicité h, alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq h$ [Gou04a]

Ex Si N est nilpotent alors $\chi_N(X) = X^n$. Si p projecteur alors $\chi_p(X) = X^{n-r}(X-1)^r$ où $r = \mathrm{rg}(p)$

II Diagonalisabilité

Définition et diagonalisabilité

Def D'un endomorphisme et d'une matrice diagonalisable [Gou04a]

Rq Un endomorphisme f est diagonalisable SSI sa matrice dans une base quelconque est diagonalisable. [Gou04a]

Pro Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors f est diagonalisable. [Gou04a]

App Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Th Toutes les équivalences sur le fait que f soit diagonalisable, annulée par un polynôme scindé à racines simples, E est la somme directe des sous-espaces propres etc... [Gou04a] et [BMP05]

Ex Les projecteurs sont diagonalisable les symétries aussi (si $car(\mathbb{K}) \neq 2$) [BMP05]

Diverses applications

App Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ alors u est diagonalisable SSI $X^q = X$ annule u [BMP05]

App Théorème de Burnside : Soit $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ tq $\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in G\ A^N = I_n$ alors G est un sous-groupe fini.

App Si f est diagonalisable et si F stable par f alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

Def D'un élément algébrique d'une extension de corps [Per04]

Def D'une extension algébrique [Per04]

Def Introduction des quaternions (pour le Dev) [Per04]

DEV Les seuls extensions de corps gauches de $\mathbb{R}$ et algébriques sur $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$. [LMB20]

Conséquences topologiques

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toutes les normes sur $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}(E)$ sont équivalentes et on munit tout sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la topologie induite.
Donner les définitions de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}); \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$. [BMP05]

Pro ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $\mathcal{C}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathring{\mathcal{D}}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{C}_n(\mathbb{K})$. [BMP05]

App $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$ [Gou04a] (p196).

App $A \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ alors A nilpotente SSI 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A, et A diagonalisable SSI la classe de similitude de A est fermée. [Gou04a] (page 199 et 201).

III Diagonalisation remarquables

Diagonalisation simultanée

Pro $f \circ g = g \circ f$ alors tout sous-espace propre de f est stable par g [Gou04a]

Th Si f, g diagonalisables et commutent SSI ils sont codiagonalisables [Gou04a]

Rq Ça marche aussi pour une famille (f_i) d'endomorphismes diagonalisables et commutant deux à deux. [Gou04a]

Matrices symétriques

Th Théorème spectral [Rom01]

Rq Est faux sur $\mathbb{C}$ (donner le CE le plus simple possible) mais se généralise avec les matrices unitaires et normales.

App Existence d'une unique racine carré de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{++}$. [Rom01]

Décomposition de Dunford

DEV Décomposition de Dunford

DEV u est diagonalisable SSI $\exp(u)$ est diagonalisable.

rq on a les même résultat avec les matrices + dire qu'il faut faire attention que ça n'est pas diagonale plus la partie nilpotente (ex de la matrice diagonalisable)

App Décomposition en produit de matrice diagonalisable et unipotente

App Si $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est munie d'une norme matricielle $|||.|||$ induite par une norme vectorielle alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \left(|||A^k|||^{1/k}\right)$.

204 - Connexité. Exemples et applications.

Motivation: Passage du local au global, i.e. si une propriété est vérifiée localement alors elle l'est globalement.

I Généralités

On fixe $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Définition et premières propriétés

Def E est connexe SSI les seuls ouverts-fermés de E sont $\emptyset$ et E SSI E n'est pas l'union de deux ouverts disjoints non vides SSI E n'est pas l'union de deux fermés disjoints non vides. [Gou04b](cha 1.4.1) [Has18](4.1)

Def Une partie connexe d'un espace topologique [Hau14](15.15) [Has18](4.1)

Ex $(\mathbb{R}, |.|)$, les singletons et $\emptyset$ sont connexes mais $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ [Gou04b](cha 1.4.1). [Has18](4.1)

Prop Caractérisation d'une partie connexe A de E si A inclu dans l'union de deux ouverts/fermés disjoints de E [Gou04b](cha 1.4.1). [Has18](4.1)

App Lemme des douanes [Gou04b](exo 1 cha 1.4). [Has18](4.1)

Prop $A \subset B \subset \overline{A}$ et A connexe alors B aussi. [Has18](4.1)

Stabilité

Prop Si f continue + E connexe alors $f(E)$ connexe. [Gou04b](cha 1.4.1) [Has18](4.1)

CE Faux pour l'image réciproque $f(x) = x^2$ et $f^{-1}([1, +\infty[)$ [Hau14](15.9)

Prop E connexe SSI toute application continue $f : E \mapsto \{0, 1\}$ (muni de la topologie discrète) est constante [Gou04b](cha 1.4.1). [Has18](4.1)

Coro Une union quelconque de connexe d'intersection non vide est connexe. [Gou04b](cha 1.4.1).

CE $\{0\}$ et $\{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Coro Un produit fini cartésien d'espaces E_i est connexe SSI chaque E_i est connexe [Gou04b](cha 1.4.1). [Has18](4.1)

Prop Une intersection de connexe n'est pas forcément connexe. Prendre le cercle unité intersecté avec $\mathbb{R}$ [Hau14](15.11)

(App) F fermé de E + $Fr(F)$ connexe alors F est connexe [Gou04b](exo 3 cha 1.4 avec le CE)

(CE) Si F pas fermé alors faux ($E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{R}^*$ et $Fr(F) = \{\emptyset\}$.

Composantes connexes

Def Relation d'équivalence + def composante connexe [Has18](4.2)

Th Composante connexe d'un point est la réunion des ensembles connexes qui le contiennent etc... [Has18](4.2) + donner des exemples

CE Les composantes connexes ne sont en général pas ouverts [Has18](4.2) (Une partie non réduit à un point de $\mathbb{Q}$ pour la topologie induite)

II Connexité par arcs et par lignes brisées

Connexité par arc

Avantage : est plus visuel et concrète que la connexité. Incovénient : Ne passe pas à la fermeture (cf CE).

Def Chemin [Has18](4.4)

Lem Il existe un chemin de x à y est une relation d'équivalence [Has18](4.4)

Def Connexité par arc [Has18](4.4) + un exemple

Prop Connexe par arcs implique connexe mais réciproque fausse [Has18](4.4) (en gros ne passe pas à la fermeture cf remarque 4.4.2 dans [Has18])

Prop $\mathbb{R}^n$ avec $n > 1$ privé d'un nombre dénombrable de point est connexe par arc [Has18](4.4)

App Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphe [Has18](4.4) + rq disant que $\mathbb{R}^m$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ssi $m = n$ mais que c'est beaucoup plus compliqué

Application aux matrices

Prop $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs [Rom99](cha 5)

Prop Les composantes connexes de $Gl_n(\mathbb{R})$ sont $Gl_n^+(\mathbb{R})$ et $Gl_n^-(\mathbb{R})$ [Rom99](cha 5)

App L'ensemble des matrices de rang r pour $r < n$ est connexe par arc.

DEV $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arc, utilise pour montrer que l'exponentiel est surjective [LMB20].

Prop Les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$ sont $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$ [Rom99](cha 5)

App $SO_3(\mathbb{R}) = O_3^+(\mathbb{R})$ est simple [CG13](p 239).

Connexité par lignes brisées, connexité étoilée

Notion encore plus concrète que la connexité par arcs et plus simple à manipuler. Dans cette partie on se place sur un $\mathbb{R}-$e.v.n

Def ligne brisée + Connexité par ligne brisée (ou ligne polygonale) [Gou04b, cha I.4.3]

Rq Connexe par ligne brisée alors connexe par arc [Gou04b, cha I.4.3]

CE Réciproque fausse : le cercle

Th Une partie ouverte Ω de E est connexe SSI ele est connexe par lignes brisées [Gou04b, cha I.4.3]

(Rq) Donc en particulier une partie ouverte connexe de E est connexe par arc + faux si pas ouvert comme le montre le cercle.

III Utilisation de la connexité

A l'analyse réelle

Th Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles [Gou04b](1.4.1)[Has18](4.1)

Th théorème des valeurs intermédiaires [Gou04b](1.4.1) [Has18](4.1)

CE Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$ est pas dans R.

App Fonction continue de $[0,1] \mapsto [0,1]$ admet un point fixe.

App Une fonction polynomiale de degré impair admet une racine

(App) Si $f : \mathbb{U} \mapsto R$ est continue alors il existe deux points diamétralement opposés de $\mathbb{U}$ ayant même image par f [Gou04b](exo 4 chap 1.4).

Th De Darboux [Gou04b](I.4 exo 8)

App Donne une condition (nécessaire) pour qu'une fonction admette une primitive: La fonction partie entière n'admet pas de primitive.

CE Réciproque fausse voir Voir ce texte de l'APMEP (avant dernière page)

Th Des accroisssements finis version segment, convexe et connexe si $Df = 0$ alors f est constante [Gou04b](V.1.3) + CE si $Df = 0$ mais sur U non connexe.

App f à valeur réelle si $f^{(n)} = 0$ sur un connexe alors f est un polynome.

DEV Théorème de Sunyer y Balaguer [Mad97]

A l'analyse complexe

Th Principe des zéros isolés [QQ17](cha III.5.1)

Th Principe de prolongement des identités [QQ17](cha III.5.1) (attention il faut bien que le point d'accumulation soit dans Ω, $\sin(\pi/z)$ sur]0,1[.

App $H(\Omega)$ est un anneau intègre

(App) Densité des polynômes orthogonaux [BMP05]

Def Indice d'un point par rapport à une courbe [QQ17](cha III.3.3)

Prop Sur l'indice (c'est un entier, nulle sur la composante non bornée etc...) [QQ17](cha III.3.3)

Rq A l'oral ou en remarque dire que l'indice sert pour les formules de Cauchy, théorèmes des résidus c'est une notion importante.

Th De Cauchy triangulaire/Goursat [QQ17](cha III.4.1)

Th De Cauchy pour un ouvert convexe (= condition d'existence de primitive) [QQ17](cha III.4.3) (rq sur un ouvert étoilé suffit plutôt que convexe)

Coro Avec les deux th précédents on en déduit qu'une fonction holomorphe admet une primitive et donc que son intégrale sur un lacet est nul.

App Calcul de $\widehat{G_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G_{/4a}$ (convention $-ixt$).

IV Remarques

- Pour les fonctions holomorphes on pourrait parler dans un cas plus général avec le théorème de Cauchy dans des ouverts simplements connexe [QQ17]. On pourrait aussi parler du principe du maximum.
- Je ne parle pas d'équation différentielle mais on pourrait avec le théorème de Cauchy-Lipschitz global (qui illustre le passage du local au global).
- De même on pourrait parler de prolongement avec la connexité et des fonctions spéciales.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Motivation: Pouvoir travailler avec des suites (existence de limite, bornée, etc) dans des espaces qui ne sont pas compacts qui est LE cadre pour cela[4].

I Généralité sur les espaces complets

On fixe (X, d) un espace métrique.

Suites de Cauchy

Def Suite de Cauchy [Has18]

Prop Suite convergente est de Cauchy + Suite de Cauchy est bornée (+ toute sous-suite de Cauchy est de Cauchy) [Has18]

CE Les points précédents sont bien des implications : $((-1)^n)$ et le développement en base 10 de $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{Q}$.

Prop Sur les suites de Cauchy et valeurs d'adhérence [Has18]

Prop L'image d'une suite de Cauchy par une appli unif continue [Has18]

CE $X =]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ pas unif continue [Has18]

Espaces complets

Def Espace complet [Has18]

Ex $(\mathbb{R}, |.|); (C_b(X, Y), d_\infty)$ où (Y, d) est complet et $\mathbb{Q}$ pas complet.

Rq La complétude n'est pas une notion topologique mais métrique [Has18, rq 2.6.2]

Prop Si A complet alors A est fermé dans X etc... [Has18, prop 2.6.5]

App Tout s.e.v de dim finie d'un e.v.n complet est fermé donc complet.

Th Toute intersection d'espaces complets est complet + toute réunion finie d'espaces complets est complet

CE $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[-1 - 1/n; 1 + 1/n]$ n'est pas complet

Th Un produit au plus dén d'espaces complets est complet [Has18, prop 2.6.6 et 2.6.7]

Def Espace de Banach [Has18, def 6.1.3]

Prop Banach SSI toute série abs convergente est convergente

[4] Il est donc intéressant de faire des liens entre les deux notions dans le plan.

Prop Un espace compact est complet

CE $(R, |.|)$ complet mais pas compact

Th X compact SSI (X, d) précompact + complet [Has18, th 3.1.3]

II Exemple de deux espaces complets

Espace de Hilbert

Def Espace de Hilbert [Has18, def 8.2.2]

Ex R^n, $l^2(\mathbb{R})$ sont des espaces de Hilbert [Has18, ex 8.2.1]

CE L'ensemble des suites à support fini de $l^2(\mathbb{R})$ est préhilbertien mais n'est pas de Hilbert.

Th De projection [Has18, th 8.3.1 et prop 8.3.5]

Th F fermé et existence d'un supplémentaire [Has18, cor 8.3.1]

Th De représetation de Riesz ([Has18, p. 8.4] mais faire l'énoncé avec il existe un $a \in H$ tel que...)

Def Application coercive [IP19, Dans opt pour un Hilbert]

DEV Optimisation dans un Hilbert [IP19]

CE $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'atteint pas son infimum ($\exp$ pas coercive) + $J : x \in l^2(\mathbb{R}) \mapsto (||x||^2 - 1)^2 + \sum_{k\geq 0} \frac{x_k}{k+1}$ n'atteint pas son infimum (pas convexe).

(Def) De base hilbertienne [Has18, def 8.6.1]

(Ex) La famille (e^{int}) est une base hilbertienne de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel.

Espaces L^p

Def Espaces $L^1(\mathbb{R})$; $L^p(\mathbb{R})$ avec les normes associées et même chose avec $L^\infty(\mathbb{R})$. [Bre96]

Not Définir l'exposant conjugué. [Bre96]

Prop Inégalité de Hölder [Bre96]

Prop Inégalité de Minkowski [Bre96]

Th L'espace $(L^p(\mathbb{R}), ||.||_p)$ est un e.v.n [Bre96]

Th L'espace $(L^p(\mathbb{R}), ||.||_p)$ est un espace de Banach [Bre96]

Th (f_n) suite de L^p et $f_n \to f$ dans L^p alors il existe une sous-suite extraite de (f_n) tq $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur $\mathbb{R}$ [Bre96]

III Résultats fondamentaux sur les espaces complets

Théorème de Point fixe de Picard

TH De point fixe de Picard : existence/unicité, suite des itérées, vitesse de convergence, cas où c'est une composée qui est contractante [Rou15, p 147 et 169, chap 4]

CE du Théorème du point fixe de Picard lorsque hypothèses en défaut [Rou15, p. 147-148, chap 4], (mais réciproque partielle dans le cas compact)[Rou15, p. 171, chap 4]

App Equation intégrale de Volterra [Rou15]

App Théorème de Cauchy-Lipschitz global [Rou15, p. 180, chap 4]

Théorème de prolongement

Th De prolongement ([Has18, p. 2.6] changer f unif continue en appli linéaire continue) (aussi en [Has18, p. 6.3])

App Théorème de Fourier-Plancherel [Rud20]

Def D'une fonction réglée = limite uniforme de fonction en escalier.

Def Intégrale de Riemann sur les fonction en esccalier [Gou04b, p. III.1.1]

App Prolongement de l'intégrale de Riemann sur les fonctions réglées ([Gou04b, p. III.1.1] que la preuve pas l'énoncé).

Théorème de Baire

Th De Baire [Has18]

CE $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'assertion sur les réunion de fermés dans le th de Baire car $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

DEV De sunyer y Balaguer [Mad97]

Th De Banach-Seinhaus + une appli [Gou04b, Annexe A exo 7]

Th De l'application ouverte [Has18, th 7.1.1]

Coro Isomorphisme de Banach + le coro 7.1.2 qui suit + ex qui suit [Has18, coro 7.1.1]

App Th du graphe fermé [Has18, th 7.1.2]

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Motivation: Introduire un cadre afin d'étudier des espaces de dimension infini comme des espaces de dimension finie. En particulier, les espaces de Hilbert offrent un cadre pour approcher les objets par projection (I), on peut (comme en dimension finie) avoir une notion de base (II) et on étudiera les compacts et les opérateurs d'un tel espace (III).

I Espace de Hilbert et théorème de projection

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Les espaces préhilbertiens, de Hilbert

Def Produit scalaire (hermitien) + espace préhilbertien + espace de Hilbert [Has18](8.2)

Ex D'espace de Hilbert avec leur ps et d'un espace préhilbertien qui n'est pas de Hilbert $C([0, 1])$ [Has18](8.2)

Prop Inégalité de Cauchy-Schwarz + identité du parallélogramme [Has18](8.2)

CE L'espace $(C([0, 1]), ||.||_\infty)$ n'est pas préhilbertien.

Orthogonalité et théorème de projection

On suppose que H est un espace préhilberitien

Def D'orthogonalité de deux éléments, orthogonal d'un espace et famille orthonormée [Has18](8.3)

Th De Pythagore + rq sur une famille orthonormée + extension pour les famille sommable et def familler sommable dans un Hilbert [Has18](8.3)

Ex Matrice symétrique et antisymétrique

On suppose maintenant que H est un espace de Hilbert

Th De projection sur un convexe fermé + remarque sur la complétude + remaraque disant que la projection est 1-lipschitzienne [BMP05](page 95)

CE Sur la non-complétude [BMP05](page 98) et $(C([0, 1], ||.||_\infty)$ est complet mais pas de Hilbert, on pose $C = \{f \in C([0, 1]),\ 0 \leq f \leq 1,\ 0 = f(0)\}$ la distance $d(1, C)$ est atteinte partout sur C.

Conséquences

Th Du supplémentaire orthogonal[BMP05](page 98)

Cor On a $\overline{F} = F = F^{\perp\perp}$ [Has18](8.3)

Cor Critère de densité $F^\perp = \{0\}$ [Has18](8.3)

CE Complétude importante $H = (C([-1, 1]), <\ .,.\ >_{L^2})$ n'est pas complet, le théorème du supplémentaire orthogonal est faux avec : $F = \{f \in H,\ f_{|[0,1]} = 0\}$ qui est un s.e.v fermé de H pourtant $F^\perp = \{f \in H,\ f_{|[-1,0]} = 0\}$ donc $F + F^\perp \subset \{f \in H,\ f(0) = 0\} \neq H$. ou bien CE de [Has18](exemple 8.6.3)

App Densité des polynômes orthogonaux (un DEV [BMP05])

Th De représentation de Riesz [Has18](8.4) (donc Hilbert est réflexif)

CE Hypothèse importante coir CE dans le plan d'Eliot ex24

App On peut définir l'adjoint d'un endomorphisme continu [Has18](8.4)

II bases hilbertiennes

Des bases orthonormées totales

Def Famille totale + base hilbertienne [BMP05](page 107)

Rq Ne pas confondre base hilbertienne et base algébrique.

Ex De $\mathbb{R}^n$, de l^2 et (e_n) pour les fonctions continues 2π périodiques. [Has18](8.6)

Prop D'orthogonalisation de Gram-Schmidt [Has18](8.6) (rq marche pour un espace préhilbertien seulement)

Cor Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable [BMP05](page 108 énoncé) [Has18](8.6)

Rq Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne mais il faut utiliser le lemme de Zorn [Has18](8.6)

Propriétés des bases hilbertienne, théorème de Bessel-Parseval

Prop Inégalité sur les projection + inégalité de Bessel [Has18](8.6)

Th égalité de Parseval [Has18](8.6)

App Calcul de $\zeta(4)$ [Gou04b]

App Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seule- ment s'il est isométrique à l'espace $l^2(\mathbb{N})$ (pas énoncé comme ça mais l'idée dans [BMP05](th 3.41) et [Has18](th 8.6.5)

III Opérateur et compacité dans un espace de Hilbert

Compacts et compacité faible

Th De la boule unité de Riesz [Has18](6.7)

Def Reste uniformément petits [LMB20](page 277)

Th Compacts d'un espace de Hilbert séparable [LMB20](page 277)

Def Convergence faible dans un Hilbert [BMP05](page 113)

Th Dans un hilbert on peut extraire d'une suite bornée une sous-suite convergente faiblement [BMP05](page 113) (démontrer aussi dans le Dev qui va suivre)

Ex-CE Une base hilbertienne (e_i) converge faiblement vers 0 mais n'admet pas de sous-suite convergente (fortement).

DEV Optimisation dans un Hilbert [IP19] + ce qui va avec def coercivité + hypothèses importantes.

Opérateurs compacts

Def Opérateurs de rang fini, opérateur compact [Bre96]

DEV Les opérateurs compacts dans un Hilbert sont exactement les opérateurs de rangs finis [LMB20]

Rq Brézis disant qu'un sens est toujours vrai mais pas l'autre.

App Equation intégral de Fredhlom [QZ13](V.VI.8)

(Théorème spectral)

Def Opérateur autoadjoint + spectre + valeur propre d'un spectre [Bre96]

Th Théorème spectral d'un opérateur compact autoadjoint dans un Hilbert alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T [Bre96]

IV Remarques

- On n'aurait peut-etre pu faire un plan où l'on ajoutait de la structure petit à petit (préhilbertien puis hilbert).
- Je ne parle pas de Lax-Milgram, Stampachia ou d'espace de Bergman.
- Sur la partie des opérateurs, lire le chapitre de [Bre96].

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Motivation: Avoir des suites qui ne dépendent que du terme précédent (on peut oublier le passé) et qui est donc simple à mettre en oeuvre (on les utilise pour les calculs des prêt de banque) et à programmer. Il est donc naturel de se demander quelle sont les conditions de convergence (I et II) et les diverses applications que l'on a (III).

I Généralités sur les suites

Définition et premiers exemples

Def Suite récurrence d'ordre h [Gou04b, p. IV.1.2]

Def Orbite d'une suite [Rom19b, p. 12.1]

Prop Si u_n converge vers l et f continue en l alors $f(l) = l$ [Gou04b, p. IV.1.2] + [Rom19b, p. 12.1]

CE La continuité de f n'assure pas la convergence de l'orbite [Rom19b, p. 12.1]

CE réciproque fausse, prendre $1_{\mathbb{Q}}$ [Rom19b, p. 12.1]

Th f continue de I dans I alors (u_n) converge SSI $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0 [Rom19b, p. 12.2]

Rq Dans le cas d'une suite normale (pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$) alors on sait seulement que l'ensemble des valeurs d'adhérence est vide ou un intervalle fermé [Rom19b, p. 12.2]

Ex Suite arithmétiques [Gou04b, p. IV.1.2]

Ex Suite géométrique [Gou04b, p. IV.1.2]

Def+Ex Suite homographique[5] [Gou04b, p. IV.1.2]

Monotonie dans le cas réel

On va retirer des hypothèses de continuité sur f, on peut encore dire des choses. Dans la suite I est un intervalle réel fermé de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie de I dans lui même.

lem Si $f : I \to I$ croissante alors f admet un point fixe [Rom19b, p. 12.2]

CE Faux si la fonction est décroissante : $1_{[0,1/2]} : [0, 1] \to [0, 1]$ n'admet pas de point fixe [Rom19b, p. 12.2]

[5] Exemple pour faire plaisir au jury.

Prop Si f croissante alors (u_n) monotone et si f continue alors la limite est un point fixe. [Rom19b, p. 12.2]

CE Si f pas continue alors (u_n) ne converge pas vers un point fixe de f [Rom19b, p. 12.2]

CE Si f décroissante c'est faux : $f = -id$ et $I = [0, 1]$.

Th Si f décroissante alors f admet au plus un point fixe et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers des points fixes de $f \circ f$ + cas où $f \circ f$ admet un unique point fixe. [Rom19b, p. 12.2]

CE Si $f \circ f$ admet plusieurs points fixes alors la suite (u_n) peut-etre décroissante [Rom19b, p. 12.2]

Le cas vectoriel

Def Une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace C^p est récurrente linéaire s'il existe une matrice $A \in M_p(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

Rq Lorsque l'on a une suite récurrence linéaire complexe d'ordre p, i.e. qui peut s'écrire sous la forme $u_n = \sum_{k=1}^{p} a_k u_{n-k}$ alors on peut la vectorialiser. $X_n = AX_{n-1}$ + écrire la matrice X_n et A.

Rq Pour étudier une telle suite on essaye de réduire la matrice A.

DEV Convergence d'une suite de polygone [IP19]

Def Equation caractéristique d'une suite linéaire récurrente linéaire complexe d'ordre p [Gou04b, p. I.1.3]

Th Th disant que le terme général d'une suite linéaire récurrente d'ordre p est de la forme $u_n = P_1(n)r_1^n + \cdots + P_q(n)r_q^n$ [Gou04b, p. I.1.3] ou [Rom19b, p. 374]

Ex Etude dans le cas d'une suite linéaire récurrente d'ordre 2. [Gou04b, p. I.1.3]

II Autour des points fixes

Théorèmes de point fixe

Th Point fixe de Picard + vitesse de convergence [Rou15]

CE Hypothèses importantes dans le th du point fixe de Picard [Rou15]

App Cauchy-Lipschtiz global [Rou15]

Th Th point fixe itéré [Rou15]

App equation intégrale de Volterra [Rou15]

Prop Variante du point fixe dans un compact [Rou15]

App $\sin(u_n)$ dans $[0, \pi/2]$, mais vitesse de convergence lente

CE Suite des CE de [Rou15] plus adaptés.

Attraction, répulsion et superattraction

Prop Points attractifs, répulsifs et superattractifs (def + vitesse + 2 exemples pour le cas critique) [Dem06, p. IV.2]

Prop Précision sur les cas attractifs avec des dessins [Dem06, p. IV.2] (rajouter à la main un dessin cas répulsif et cas extrémas local + cas on l'on ne peut pas conclure avec x^3 et $-x^3$).

Prop Lemme + th pour point attractif dans R^d + remarque [Dem06, p. IV.3.2]

Th Méthode des petits pas [Rom19b, th 11.13 p322]

APP Appliquer la méthode précédente à la fonction sinus [Rom19b, th 11.13 p323] (DEV possible)

III Applications en analyse numérique

Méthode de Newton

Th Méthode de Newton : ppe + thme + vitesse de convergence [Dem06, p. IV.2.4] [Rom19b, p. 12.4.2]

rq Dire les inconvénients : avoir une idée des zéros (sinon Risque d'avoir une tangente nulle CE du sinus) et il faut connaitre la dérivée.

Prop Méthode de la sécante (admis) [Dem06, p. IV.2.5] [Rom19b, p. 12.4.1]

rq Pas besoin de calculer la dérivée mais il faut avoir une idée d'un encadrement d'un zéro + prb de stabilité numérique. [Dem06, p. IV.2.5]

App Calcul d'un racine $p$ième [Rom19b, p. 12.4.3]

Th Méthode de Newton dans R^d (énoncé, vitesse) (pas de ref, si ça n'est pas dans le plan il faut savoir en parler[6])

Recherche de valeur propre

Prop Méthode de la puissance: algo + amélioration pour avoir toute les vp [Rom19a] (rien sur la vitesse mais c'est en $O(\frac{1}{n})$ en général)

Prop Méthode de la puissance inverse [Rom19a, en remarque page 212]

Prop Décomposition LU, def + rq disant quelle type de matrice admet une telle décomposition + ex (faire à la main) [Rom19a]

Prop Méthode QR pour obtenir les vp [Cia06] (rien sur la vitesse...)

Résolution de systèmes linéaires

Def Méthode itérative introduction avec la forme de la suite [Rom19a].

Def Méthode itérative convergente [Rom19a].

DEV Méthode itérative [IP19]

Tab Faire le tableau pour résumer Jacobi, Gauss-Siedel (et relaxation) : nom de la méthode; forme des matrices M et N, condition de convergence [Rom19a]

IV Remarques

- Il faut parler de développement asymptotique, au minimum de $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

[6] Question classique du jury.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Motivation: Le calcul d'aire ou de volume est un problème récurrent dans l'histoire des maths (pour faire du commerce ou calculer des surfaces de territoire ou des problèmes de physique avec le potentiel). Il y a d'abord eu des techniques élémentaires pour calculer les intégrales ou les approcher (I) puis les intégrales à calculer devenant plus complexe (avec des passages à la limite par exemple) il a fallu développer de nouveaux outils (II) voir utiliser d'autres théories mathématiques (III).

I Méthodes élémentaires

Primitives, décomposition en éléments simples et intégration

Th Fondamental de l'analyse [Can09, p. I.1.1.2]

CE Il faut que f soit continue : $\mathbf{1}_{[0,1/2]}$ sur $[0.1]$ [Can09, p. I.1.1.2]

Prop la prop qui dit que $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ [Can09, p. I.1.1.2]

Tab Faire un tableau avec les primitives usuelles en annexe [Gou04b, p. II.2]

rq N'importe quelle primitive de F convient.

Ex fonction x^n et $\frac{1}{x^2}$ sur un intervalle.

Th Décomposition en éléments simples [Gou04a, p. II.3.1]

rq dans $\mathbb{R}$ ça donne des formes plus "simples" [Gou04a, p. II.3.3] + donner un exemple.

Prop Linéarisation du sinus et cosinus [Gou04b, p. III.2.3] + un exemple

IPP et changement de variables

Th Intégration par parties [Gou04b, p. III.1.2]

Ex Intégrale de Wallis [Gou04b, p. III.1.4]

Ex Fonction gamma [Gou04b, p. IV.7]

Cor Lemme de Riemann-Lebesgue version $\mathcal{C}^1$.

Th De changement de variables (changer le continue en mesurable) [Gou04b, p. III.1.2]

Ex L'intégrale de $-a$ à a si f est pair ou impair [Gou04b, p. III.1.2]

Ex L'intégrale $\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx$ [Gou04b, p. III.1.2]

App $\int_0^{\pi/2} \log(\sin(x))dx$ [Gou04b, III.5 prb 3]

App Poser $t = \tan(x/2)$ pour exprimer $\cos$ et $\sin$ + ex des primitives de $\frac{1}{\sin}$ et de $\frac{1}{\cos}$ [Gou04b, p. III.2.3]

Méthodes de calculs approché

Def Somme de Riemann [Gou04b, p. III.1.3]

Th Convergence de la somme de Riemann [Gou04b, p. III.1.3]

Cor Méthode des rectangles [Gou04b, p. III.1.3]

Ex $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \log(2)$ [Gou04b, p. III.1.3]

Th Méthode de Monte-Carlo [IP19]

rq Convergence lente mais insensible à la dimension donc pratique pour le calcul de volume dans $\mathbb{R}^d$ ou pour des fonctions avec plein de bruit.

II Des outils plus performants

Changement de variables généralisés

Th Changement de variables [Can09, cha 4.2]

Ex Coordonnées polaires [Can09, cha 4.2]

App Intégrale de Gauss [Can09, cha 4.2]

(Th) Tonelli + Fubini [Can09, cha 4.1 2)]

(App) Volume de la boule unité [Can09, cha 4.1 2)]

Méthodes d'intervertion

Th De la convergence monotone [Can09, ch 3.4 p 178]

Th De la convergence dominé [Can09, chap 3.5]

Th De permutation entre $\sum$ et $\int$ [Can09, chap 3.5]

CE L'hypothèse des valeurs absolue est importante sinon prendre $u_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ avec $x > 0$ et la somme partant de 1 [Can09, ch 3.5 en rq]

Ex $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. ou ex [Can09, chap 1.3]

Th Continuité d'une intégrale à paramètre [Can09, cha 1.4]

CE Domination importante : cf [Can09, chap 1.3] (prendre $t = x$ pour montrer que f n'est pas majorable par une fontion intégrable).

EX La fonction Γ est continue.

Th De dérivabilité pour une intégrale à paramètre [Can09, cha 1.4]

Ex Calcul de $\widehat{G_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G_{/4a}$ (convention $-ixt$) avec une équation diférentielle.

rq Une version analogue pour le caractère holomorphe existe, lorsque les fonctions sont holomorphes, il faut juste vérifier la domination sur f est pas sa dérivé contrairement au cas réel [QQ17, p. III.4.6]

III Avec d'autres théories mathématiques

Etendre à la variable complexe

L'idée c'est de faire un changement de variable complexe dans une intégrale réelle

Th Holomorphie dans l'intégrale [QQ17, p. III.4]

Lem Zéros isolés d'une fonction holomorphe + $Z(f)$ est au plus dénombralble [QQ17, p. III.5]

(App) L'anneau des fonction holomoprhe est intègre. [QQ17, p. III.5]

Th Prolongement des identités [QQ17, p. III.5]

App Calcul de $\widehat{G_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G_{/4a}$ (convention $-ixt$).

rq On utilisera aussi ce th pour la densité des polynomes orthogonaux.

Le théorème des résidus

Th Théorème de Cauchy (sur un ouvert convexe) disant que l'intégrale sur un lacet est nul [QQ17, p. III.4]

App Calcul de $\widehat{G_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} G_{/4a}$ (convention $-ixt$).

Th Théorème des résidus [QQ17, p. V.2]

DEV Transformé de Fourrier de $\frac{1}{ch(\pi x)}$. [QQ17]

La formule d'inversion de Fourier

Th Inversion de Fourier [Can09, p. 7.4]

Cor Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$ p.p.

DEV Densité des polynômes orthogonaux. [BMP05]

245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Motivation: Notion plus forte et rigide que l'analyse réelle (par exemple l'analycité) avec des applications dans d'autres domaines.

I Holomorphie

$\mathbb{C}-$dérivabilité, holomorphie

Def $\mathbb{C}-$dérivabilité + fontion holomorphe [QQ17](cha III.1.1)

Prop De Cauchy-Rienmann [BMP05](p 57)

CE Pour dire que la $\mathbb{R}-$différentiabilité est nécessaire [BMP05](p 57)

CE $\mathbb{C}-$dérivable implique $\mathbb{C}-$différentiable mais pas l'inverse: cf $z \mapsto \overline{z}$ [QQ17](cha III.1.1)

Prop Stable par addition, multiplication, composition [QQ17](cha III.1.1)

Prop On a $A(\Omega) \subset H(\Omega)$ (+ rq orale disant qu'on a l'inclusion réciproque mais on le verra plus tard en II.b)) [QQ17](cha III.2.3)

Ex Les fonctions $\sin; \cos; ch; sh; \exp$ sont holomorphes.

Détermination principale

Lem Théorème d'homéomorphisme (de l'exponentielle) [QQ17](p 8)

Def De $\exp$ complexe + dire que c'est une bijection holomorphe.

Th De l'inversion ponctuelle sans les hypothèses sur la continuité de g en b et $f'(a) \neq 0$ (c'est automatique avec les fonctions holomorphes) [QQ17](cha III.1.3)

Def De la détermination principale du logarithme [QQ17](cha III1.1.4) + (rq disant que ça coïncide avec le logarithme que l'on connait sur $\mathbb{R}$.

(App) On peut définir la fonction (privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$) $z \mapsto x^z$.

II Théorie de Cauchy

Intégrale curviligne

Def Chemin (rajouter C^1 par morceaux); lacet; et notation γ^* pour l'image du chemin γ.+ un ex [QQ17](cha III.3.1)

Def Intégrale le long d'une courbe [QQ17](cha III.3.2) + ex

(Prop) Sur la majoration de l'intégrale avec la longueur du chemin [QQ17](cha III.3.1)

(Prop) $\int_\gamma f' = f(v) - f(u)$ (utile plus tard dans le plan) [QQ17](cha III.3.2)

Def Indice d'un point par rapport à une courbe [QQ17](cha III.3.3)

Prop Sur l'indice (c'est un entier, nulle sur la composante non bornée etc...) [QQ17](cha III.3.3)

Théorème de Cauchy dans un ouvert convexe

Th De Cauchy triangulaire/Goursat [QQ17](cha III.4.1)

Th De Cauchy pour un ouvert convexe (= condition d'existence de primitive) [QQ17](cha III.4.3) (rq sur un ouvert étoilé suffit plutôt que convexe)

Coro Avec les deux th précédents on en déduit qu'une fonction holomorphe admet une primitive et donc que son intégrale sur un lacet est nul.

Th Formule de Cauchy (cas non dérivé) [BMP05](p 63)

App Formule de Cauchy pour les dérivés + $H(\Omega) \subset A(\Omega)$ [QQ17](cha III.4.4 dans la fin de la preuve)

Conséquence de l'analycité

Th De Morera [QQ17](cha III.4.5)

Coro Holomorphie sous l'intégrale [QQ17](cha III.4.6)

Ex La fonctoin $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-xz} dx$ est holomorphe ou parler de la fonction gamma.

Th Inégalité de Cauchy [QQ17](cha III.4.7)

Coro Théorème de Liouville [QQ17](cha III.4.8)

App Théorème de D'Alembert-Gauss

Th Principe des zéros isolés [QQ17](cha III.5.1)

Th Principe de prolongement des identités [QQ17](cha III.5.1) (attention il faut bien que le point d'accumulation soit dans Ω, $\sin(\pi/z)$ sur]0,1[.

App $H(\Omega)$ est un anneau intègre

DEV Densité des polynômes orthogonaux [BMP05]

Th Principe du maximum [QQ17](cha III.6.1)

Rq Ne dis rien sur le minimum $z \mapsto z$ [BMP05](page 73)

App Exo 2.7 et/ou 2.8 ($f(0) = 1$ et f de module plus grand que 2 sur le cercle unité alors f s'annule) de [BMP05](p 80)

III Fonctions méromorphes

Singularités et résidus

Def Singularité effaçable + ex [QQ17](cha V.1)

Def Pôle d'ordre m + partie principale + résidu [QQ17](cha V.1)

Def $e^{1/z}$ a une singulérité en 0 mais qui n'est pas un pôle, on dit que c'est une singularité essentielle + rq disant que proche de zéro ça prend toute les valeurs de $\mathbb{C}$ (th de Picard) [BMP05](p 66)

Def Fonction méromorphe + ex [QQ17](cha

Lem De Riemann (borné + Holo sur $V \setminus \{a\}$ alors a est effaçable) [QQ17](cha V.1.4)

Prop Ordre du pôle en a = multiplicité de a comme zéro de $1/f$ [QQ17](cha V.1.5) + ex 1

(Prop) Sur les résidus de $f = \frac{g}{h}$ avant l'exemple [QQ17](cha V.1.6)

Théorème des résidus et applications

Th Des résidus [BMP05, p. 67]

DEV Transformé de Fourier de $\frac{1}{ch(\pi x)}$ [QQ17]

Lem Formule de Kronecker comptant le nombre de zéros de f [QQ17, cha V.3.1]

Th De Rouché (version simple à démontrer avec les notations) [QQ17, cha V.3.2]

Cor Thme de Rouché version utile à utiliser (c'est une réécriture) [BMP05] (page 67)

App Nombre de zéros dans $D(0,1)$ de $z^8 - 5z^3 + z - 2$ [BMP05](p 67)

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Motivation: Décomposer une fonction $2\pi-$périodique comme une somme de fonctions $2\pi-$périodiques élémentaires $\sin;\cos;e^{it}$. Puis on peut se poser une autre question qui est de savoir si la série de Fourier d'une fonction converge, si oui dans quel sens et est-ce vers f?

I Fonctions périodiques et série de Fourier

Fonctions périodiques

Def Fonction périodique + ensemble de périodes est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et des exemples pour chaque sous-groupe [QZ13](IV.I.1)

rq Si f est périodique alors on peut se ramener au cas 2π périodique [QZ13](IV.I.1)

rq Une fonction 2π-périodique $\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ s'identifie à une fonction définie sur le tore $T:=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui est un groupe topologique. [BMP05](page 125)

Def Espace L^p et L^∞ [QZ13](IV.2) (séparer les definitions pour être plus clair).

(rq) Par Hölder on a $L^p\subset L^q$ si $q<p$. [QZ13](IV.I.2)

Coefficient de Fourier

Def Coefficients de Fourier $c_n(f),\ f\in L^1$ + famille (e_n) [QZ13](IV.I.2)

Rq Si f est paire ou impaire alors c_n s'exprime avec un cosinus ou sinus [QZ13](IV.IV.1)

Ex Fonction signal et triangle [QZ13](IV.IV.2)

(Def) Polynôme trigonométrique [BMP05](page 123)

(Def) Produit de convolution.

Prop Le Formulaire avec les coefficients de Fourier [QZ13](IV.I.3 sauf le viii)

Lem De Riemann Lebesgue [BMP05](page 126)

App Si $f\in\mathcal{C}^k$ alors $n^kc_n(f)\to 0$ [QZ13](IV.V.2)

Th Def C_0 et que $\mathcal{F}$ est un morphisme d'algèbre pour la convolution qui est continu.[QZ13](IV.I.3)

Def Somme partielle $S_N(f)$ [BMP05](page 122)

Def Série de Fourier (faire attention l'indice sur $\mathbb{Z}$ est une notation on ne somme pas n'importe comment).

II Théorèmes de convergence

but : reconstruire la fonction à partir de sa série de Fourier.

Convergence au sens de Césaro

Def Noyaux de Dirichlet, de Féjer et moyenne de Césaro [BMP05](page 127)

Lem $S_N=f*D_N$ et $\sigma_N=f*K_N$

Prop K_N est une unité approchée (toutes ses propriétés)

DEV Th de Féjer (+rq disant qu'on a aussi convergence dans $||.||^p$).

App Densité des polynômes trigonométriques [BMP05](page 128)

App La fonction $\mathcal{F}$ est injective [BMP05](page 128)

Rq On peut montrer que la fonction $\mathcal{F}$ n'est pas surjectif [Can09](page 325-326)

(rq) Si la série de Fourier converge normalement alors elle converge vers f) [BMP05](page 128 en rq)

Convergence de la série de Fourier

Th De la convergence des S_N [BMP05](page 129)

Th de Dirichlet [BMP05](page 130) (et démo dans [Gou04b](IV.5.4)

Ex $f=\mathbf{1}_{[-a,a]}$ [BMP05](page 130)

(Coro) Si f c.p.m, 2π périodique et $\mathcal{C}^1$.p.m alors la série de Fourier converge simplement vers f [Gou04b](IV.5.4)

Th De la convergence normale [BMP05](page 131) (démo dans [Gou04b](IV.5.4)) + rq disant que $\mathcal{C}^1$ ne veut pas dire continue.

App [Gou04b](IV.5 exo2) pour montrer que $cotan(t)=\frac{1}{t}+2t\sum\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}$ (t pas multiple de π).

Cadre L^2

Prop L^2 est un espace de Hilbert pour le ps (blabla) [BMP05](page 123)

Prop La famille (e_n) est orthonormale [BMP05](page 123)

App On a $||S_N(f)-f||_2\to 0$ [BMP05](page 124)

Th La transformé de Fourier (version suite) est une isométrie bijective de L^2 dans l^2 et égalité de Parseval [BMP05](page 124)

III Quelques applications

Calcul de série

Prop $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$ et 2π périodique alors $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$ [Gou04b](IV.5 exo1)

Coro $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. [Gou04b](IV.5 exo1)

DEV Calcul des $\zeta(2k)$ (ajouter juste avant ce qu'il faut admettre en plus avant de commencer le dev).

Inégalités fonctionnelles

Lire le petit paragraphe dessus dans [BMP05](page 132). "On peut relier le comportement d'une fonction à celui de sa dérivée. Par exemple, les inégalité(s) (de Poincaré) et Wirtinger donnent un contrôle pour la norme L^2 . L'inégalité de Bernstein donne un contrôle de la norme L^∞ pour des fonctions "presque périodiques"".

Prop Inégalité de Bernstein (version fourier) [QZ13](IV.VI.1)

Prop Inégalité de wirtinger [Gou04b](IV.5 exo3)

Formule sommatoire de Poisson

La formule de Poisson réalise la connexion entre la transformée de Fourier d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et les coefficients de Fourier de cette même fonction périodisée définie en " enroulant " $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathbb{S}^1$ ([BMP05](page 132)).

Def La convention utilisée pour la transformé de Fourier [Gou04b](IV.6 prb 4)

Th Formule sommatoire de Poisson [Gou04b](IV.6 prb 4)

App Question b) de [Gou04b](IV.6 prb 4)

IV Remarques

- Avec le théorème de Banach-Steinhaus on peut montrer qu'il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier [Gou04b](Annexe A exo 8)
- On peut parler de série de Fourier exponentiel (ce qu'on a fait) et trigonométrique (avec les a_n et b_n plus simple à utiliser en pratique). Une série de Fourier (d'une fonction c.p.m) est une série trigonométrique mais la réciproque est fausse (ex $\frac{\sin(nx)}{\sqrt(x)}$) qui n'est pas la série de Fourier d'une fonction c.p.m (Parseval).
- Regarder [QZ13](IV.V.2) où il y a des résultats intéressants.

References

[BMP05] V. Beck, J. Malick, and G. Peyré. *Objectif agrégation*. 2nd. H-K, 2005.

[Bre96] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et application*. Masson, 1996.

[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral*. Cassini, 2009.

[CG13] P. Caldero and J. Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Vol. 1. Calvage et Mounet, 2013.

[Cia06] Philippe-G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation cours et exercices corrigés*. Dunod, 2006.

[Dem06] Jean-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP sciences, 2006.

[Gou04a] X. Gourdon. *Les maths en tête Algèbre*. 3ème. Ellipses, 2004.

[Gou04b] X. Gourdon. *Les maths en tête Analyse*. 3ème. Ellipses, 2004.

[Has18] Nawfal El Hage Hassan. *Topologie générale et espaces normés*. 2nd. Dunod, 2018.

[Hau14] B. Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. 2nd. Ellipses, 2014.

[IP19] L. Isenmann and T. Pecatte. *L'Oral à l'agrégation de mathématiques*. Ellipses, 2019.

[LMB20] D. Lesesvre, P. Montagnon, and P. Le Barbenchon. *131 développements pour l'oral*. Dunod, 2020.

[Mad97] K. Madère. *Développements d'analyse*. Ellipses, 1997.

[Per04] D. Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 2004.

[QQ17] H. Queffélec and M. Queffélec. *Analyse complexe et applications*. Calvage et Mounet, 2017.

[QZ13] H. Queffélec and C. Zuily. *Analyse pour l'agrégation cours et exercices corrigés*. 4ème. Dunod, 2013.

[Rom01] Jean-E. Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation algèbre et géométrie*. 2nd. De Boeck Supérieur, 2001.

[Rom19a] Jean-E. Rombaldi. *Analyse matricielle cours et exercices résolus*. 2nd. EDP sciences, 2019.

[Rom19b] Jean-E. Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle*. 2nd. EDP sciences, 2019.

[Rom99] Jean-E. Rombaldi. *Thèmes pour l'agrégation de mathématiques*. EDP sciences, 1999.

[Rou15] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel*. 4ème. Cassini, 2015.

[Rud20] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. 3ème. Dunod, 2020.