Prérequis. Propriétés de la fonction Γ, caractérisations de la convexité, dérivabilité des intégrales à paramètre, intégrale de Gauss.

Théorème 0.0.1. *La fonction Γ est log-convexe et pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Démonstration. Pour la log-convexité, Γ est infiniment dérivable et strictement positive, donc $\ln \Gamma$ est bien définie et infiniment dérivable. On a comme d'habitude :

$$(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$$

et étudier la convexité de $\ln \Gamma$ revient à étudier le signe de $\Gamma\Gamma'' - \Gamma'^2$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t} \sqrt{\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\Gamma''(x)}\sqrt{\Gamma(x)}
\end{aligned}$$

d'après Cauchy-Schwarz, ce qui conclut. Pour l'équation fonctionnelle, il suffit d'une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \lim \left(\left[-t^x \mathrm{e}^{-t} \right]_\varepsilon^A + x \int_\varepsilon^A t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \right) = x\Gamma(x).$$

□

Théorème 0.0.2 (Bohr-Mollerup)**.** *Si $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ est une application log-convexe telle que $f(x+1) = xf(x)$ pour tout $x > 0$, alors $f(x) = f(1)\Gamma(x)$. Autrement dit, Γ est à homothétie près la seule fonction log-convexe vérifiant cette équation fonctionnelle.*

Démonstration. Comme f et Γ vérifient l'équation fonctionnelle, f/Γ est 1-périodique. On montre le résultat pour $x \in]0, 1]$. Comme $\ln f$ est convexe, on dispose de l'égalité des trois pentes, disons pour un entier $n \geqslant 1$:

$$\ln f(n+1) - \ln f(n) \leqslant \frac{\ln f(n+1+x) - \ln f(n+1)}{x} \leqslant \ln f(n+2) - \ln f(n+1)$$

ce qui se réécrit :

$$\ln n \leqslant \frac{1}{x} \ln \left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \right) \leqslant \ln(n+1).$$

On multiplie par x et prend l'exponentielle pour avoir finalement :

$$1 \leqslant \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

ce qui montre que le membre du milieu tend vers 1 lorsque $n \to +\infty$. En utilisant une dernière fois l'équation fonctionnelle, on obtient :

$$1 = \lim \frac{f(n+1+x)}{n^x f(n+1)} = \lim \frac{(n+x)(n-1+x) \cdot \ldots \cdot x f(x)}{n^x n! f(1)} = \frac{f(x)}{f(1)} \lim(\text{truc indé. de } f)$$

ce qui est aussi vrai pour Γ. Ainsi, $f(x)/f(1) = \Gamma(x)/\Gamma(1) = \Gamma(x)$. □

Corollaire 0.0.3 (formule de duplication)**.** *Pour tout $x > 0$:*

$$2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(x).$$

Démonstration. Le membre de gauche est log-convexe et vérifie l'équation fonctionnelle, et sa valeur en 1 est $\sqrt{\pi}$. □

Corollaire 0.0.4 (intégrale de $\ln \Gamma$)**.**

$$\int_0^1 \ln \Gamma = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Démonstration. La fonction $\ln \Gamma$ est équivalente à $-\ln$ au voisinage de 0 donc l'intégrale est bien convergente. En passant au logarithme dans la formule de duplication et en intégrant, on obtient :

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\, \mathrm{d}x = \ln \sqrt{\pi} + \int_0^1 \ln \Gamma(x)\, \mathrm{d}x.$$

Avec les changements de variables évidents pour se ramener à des intégrales de $\ln \Gamma$, on retrouve :

$$\int_0^1 \ln \Gamma = \frac{1}{2}\ln 2 + \ln \sqrt{\pi}$$

ce qui est le résultat recherché. □

Remarques.

— Il faut savoir démontrer que Γ est strictement positive. On peut dire par exemple que $\Gamma(x) \geqslant \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t \geqslant \mathrm{e}^{-1}\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t$, la première inégalité étant par restriction de l'intégrande qui est positif, et la seconde par minoration de l'exponentielle sur $[0,1]$.

— De même, il faut savoir démontrer que Γ est infiniment dérivable, et que dériver k fois fait apparaître un $(\ln t)^k$ dans l'intégrande. On fait cela avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, avec la domination technique :

$$\begin{cases} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})\right| \leqslant |\ln t|^j t^{\varepsilon-1} & \text{si } 0 < t \leqslant 1, \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})\right| \leqslant (\ln t)^j t^{A-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

sur tout compact $x \in [\varepsilon, A]$ de $\mathbf{R}_+^*$, et pour tout $0 \leqslant j \leqslant k$.

— L'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ que l'on utilise pour démontrer la formule de duplication, c'est exactement l'intégrale de Gauss après le changement de variables habituel $u = \sqrt{t}$. Si l'on est dans une partie de leçon qui parle de Γ, on pourra précéder ce développement de la formule des compléments qui a cette égalité pour corollaire.

— On peut rapprocher ce théorème de celui de Wielandt qui énonce que Γ est la seule fonction holomorphe sur le demi-plan $\{\Re z > 0\}$ qui vaut 1 en 1, qui vérifie l'équation fonctionnelle, et qui est bornée sur $\{1 \leqslant \Re z \leqslant 2\}$.

Recasages.

— 228 : On peut par exemple commencer par démontrer que Γ est infiniment dérivable, ce qui montre que l'on a bien compris l'un des théorèmes les plus importants de la leçon. Ensuite, on peut aussi insister sur la démonstration de la log-convexité, et faire le lien avec les théorèmes de convexité qui peuvent rentrer dans la leçon.

— 229 : Le fait que Γ soit monotone à partir d'un certain temps n'est pas forcément intéressant et n'a rien à voir avec le développement. D'ailleurs, le minimum de Γ se trouve en :

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi^2-8}(\gamma-2+\ln 4)+\frac{8(7\zeta(3)-8)}{(\pi^2-8)^3}(\gamma-2+\ln 4)^2+\left(\frac{64(7\zeta(3)-8)^3}{(\pi^2-8)^5}-\frac{8(\pi^2-96)}{3(\pi^2-8)^4}\right)(\gamma-2+\ln 4)^4+\ldots$$

ce qui vaut environ $1,46163$. Le développement sert donc uniquement du côté de la convexité, et là il utilise plusieurs résultats à propos des fonctions convexes, qu'il est bon de souligner pendant la présentation.

— 236 : Le calcul de l'intégrale de $\ln \Gamma$ est assez joli et miraculeux, et en plus on utilise le calcul de l'intégrale de Gauss. Il y a plein de manières de faire rentrer ce développement ici, mais c'est bien d'éclipser un peu le théorème de Bohr-Mollerup pour passer plus de temps sur les deux corollaires.

— 239 : On illustre bien le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. Il faudrait alors le mettre comme exemple après ce théorème, ou carrément faire une sous-partie à propos de la fonction Γ.

— 253 : La convexité n'est pas à proprement parler *utilisée* dans la démonstration de Bohr-Mollerup, c'est plutôt une hypothèse du théorème. Par contre, on utilise réellement la convexité par exemple pour démontrer la formule de duplication, donc c'est bien d'insister plutôt sur ce point.

— 265 : C'est très bien si l'on veut faire l'habituelle partie sur la fonction Γ. Il faut garder en tête que ce n'est pas très très original (mais bon, on fait comme on peut).