Prérequis. Loi d'inertie de Sylvester.

Théorème 0.0.1. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E et $\Omega(E) \subset Q(E)$ la partie formée des formes quadratiques non dégénérées. Alors les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les :*

$$\Omega_k(E) = \{q \in \Omega(E) \mid \sigma(q) = (k, n-k)\}.$$

Démonstration. L'énoncé de ce théorème dépend *a priori* de la topologie de E, mais on choisit bien sûr la topologie induite par n'importe quelle norme $\| - \|$, que l'on fixe pour la suite.

Soit $q \in \Omega(E)$, de signature (r, s). Dans une base orthogonale pour q, on lit que l'on peut trouver deux sous-espaces supplémentaires F et G de dimensions respectives r et s, tels que les restrictions de q à F et à G soient respectivement définie positive et définie négative. Sur F, la fonction $\sqrt{q}$ est une norme euclidienne, donc par équivalence des normes il existe k_1 tel que $q(x) \geqslant k_1\|x\|^2$ pour tout $x \in F$. De même, $\sqrt{-q}$ est une norme euclidienne sur G, et il existe k_2 tel que $-q(x) \geqslant k_2\|x\|^2$ pour tout $x \in G$. On remplace alors k_1 et k_2 par le maximum des deux, de sorte à disposer d'un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in F,\ q(x) \geqslant k\|x\|^2, \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ q(x) \leqslant -k\|x\|^2.$$

Modulo le choix d'une base, l'espace $Q(E)$ (resp. $\Omega(E)$) est en bijection avec l'espace des matrices symétriques réelles (resp. matrices symétriques réelles inversibles). La topologie sur cet espace est donc celle induite par n'importe quelle norme, et l'on choisit la suivante :

$$N(q') = \sup_{\|x\|=1} |q'(x)|.$$

On va montrer que pour cette norme, si q' est assez proche de q alors les deux formes ont la même signature.

Soit alors $q' \in Q(E)$ telle que $N(q' - q) < k$. Pour tout vecteur non nul $x \in E$, on a alors :

$$|q'(x) - q(x)| < k\|x\|^2.$$

Ainsi pour $x \in F$ non nul, l'inégalité triangulaire donne $q'(x) > q(x) - k\|x\|^2 \geqslant 0$ et pour $x \in G$ non nul, de même $q'(x) < q(x) + k\|x\|^2 \leqslant 0$. Donc q' est définie positive sur F et définie négative sur G, donc elle est de même signature que q.

On peut maintenant conclure. On vient de montrer que chaque $\Omega_k(E)$ est ouvert, mais ils partitionnent $\Omega(E)$ par Sylvester. Il reste donc simplement à montrer que chaque $\Omega_k(E)$ est connexe.

Soient A et B deux matrices symétriques de même signature $(k, n-k)$. En posant D la diagonale formée de k fois 1 puis $n-k$ fois -1, on dispose donc de P, Q orthogonales telles que $A = P^\top DP$ et $B = Q^\top DQ$. Quitte à remplacer la première ligne de P ou Q par son opposée, on peut supposer que ces deux matrices sont de déterminant > 0. On choisit alors un arc qui relie P à Q dans l'espace connexe par arcs des matrices réelles de déterminant > 0, ce qui fournit un arc reliant A à B dans l'espace des matrices symétriques réelles de signature $(k, n-k)$. $\square$

Remarques.

— L'avantage est que la démonstration est très intuitive donc facile à retenir. On passe beaucoup de temps à montrer que les $\Omega_k(E)$ sont ouverts et très peu à démontrer qu'ils sont connexes, ce qui peut sembler dommage.
— Bien sûr il faut savoir expliquer pourquoi les matrices réelles de déterminant > 0 forment un espace connexe par arcs. Pour cela, il faut se rappeler que le groupe linéaire est engendré par les transvections et les dilatations.

Recasages.

— 170 : Bof, parce que c'est seulement le cas réel. Ça permet de remplir la leçon si vraiment on ne sait pas quoi y mettre, mais c'est un peu faiblard.
— 171 : C'est déjà mieux. Ce n'est pas mon développement préféré, mais j'avais besoin d'un deuxième développement dans cette leçon. Il illustre quand même un peu les différentes formes quadratiques sur un espace réel et la loi d'inertie de Sylvester, ce qui n'est pas si mal. Attention à ne pas oublier les coniques par contre !
— 204 : Le développement est assez bon pour cette leçon. On y utilise la connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ et on montre que l'on sait ce que sont des composantes connexes. En plus, c'est dans un espace assez abstrait et ça fait des liens avec l'algèbre. Le jury aime ce genre de liens avec les autres domaines.