Prérequis. Classifications des coniques et des formes quadratiques.

Théorème 0.0.1. *Par cinq points distincts du plan affine passe une conique. Elle est unique si et seulement si quatre de ces points ne sont jamais alignés. Elle est non dégénérée si et seulement si trois de ces points ne sont jamais alignés.*

Démonstration. Notons ces points A, B, C, D et E. Si les cinq points sont alignés, il suffit de prendre cette droite et n'importe quelle autre.

Sinon, sans perdre de généralité (A, B, C) est un repère affine du plan : notons-y (X, Y, Z) les coordonnées barycentriques. L'équation d'une conique passant par A, B et C est alors de la forme :

$$pYZ + qXZ + rXY = 0.$$

Notons (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques respectives de D et E dans le repère. La conique passe par ces points si et seulement si :

$$\begin{cases} py_1z_1 + qx_1z_1 + rx_1y_1 = 0 \\ py_2z_2 + qx_2z_2 + rx_2y_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations en les trois inconnues p, q et r est de rang au plus deux, donc il y a toujours des solutions (p, q, r) non nulles. Une conique qui passe par les cinq points existe donc toujours.

Discutons de l'unicité. Plusieurs coniques conviennent si et seulement si le rang de ce système est $\leqslant 1$, ce qui est le cas si et seulement si les mineurs de taille 2 s'annulent. Ces mineurs sont :

$$z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Dans le cas où les coefficients devant ces déterminants ne sont pas nuls, c'est-à-dire lorsque $x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \neq 0$, c'est-à-dire encore lorsque ni D ni E n'appartient à l'une des droites (AB), (AC) et (BC), le système est de rang $\leqslant 1$ si et seulement si $A, B, C \in (DE)$. Ce n'est pas possible, puisque A, B et C ne sont pas alignés. Ainsi, si la conique n'est pas unique, alors par exemple $D \in (AB)$, ce qui donne $z_1 = 0$, $x_1y_1 \neq 0$ et $y_1z_2 = 0$. En particulier $E \in (AB)$ et quatre points sont alignés.

Réciproquement, si quatre points sont alignés, alors il y a une infinité de coniques qui passent par les cinq points : il suffit de prendre la droite qui aligne les quatre points, et une autre droite qui passe par le cinquième.

Discutons de la dégénérescence. La conique est non dégénérée si et seulement si la forme quadratique de matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas dégénérée. Son discriminant est $2pqr$: s'il est nul, disons $p = 0$, alors l'équation de la conique devient :

$$0 = qXZ + rXY = X(qZ + rY)$$

qui est la réunion de deux droites. Il est impossible de placer cinq points sur deux droites sans que trois ne soient alignés.

Réciproquement, si trois points sont alignés, il existe clairement une réunion de deux droites qui passe par les cinq points, c'est donc l'unique conique en question et elle est bien dégénérée. □

Corollaire 0.0.2. *Deux coniques du plan affine soit sont confondues, soit s'intersectent au plus quatre fois, soit partagent une droite en commun.*

Remarques.

— Mieux vaut pour ce développement être très au clair au sujet de la classification des coniques, et de la classification des formes quadratiques (pour les éventuelles questions du jury).

— Le développement n'est pas dur et peut facilement s'apprendre par cœur, mais il faut faire attention de ne pas s'embrouiller dans l'argument reliant le rang du système à l'alignement des points.

— Il faut absolument faire des dessins au tableau. Quand trois ou quatre points sont alignés, on dessine les droites correspondantes et on rappelle que c'est une conique. De même, pour dire que $D \in (AB)$ si et seulement si $z_1 = 0$ par exemple, on peut faire le dessin du repère affine et rappeler le principe des coordonnées barycentriques. C'est un développement de géométrie, donc s'il n'y a pas de dessin, le jury ne sera pas content.

Recasages.

— 152 : On fait un bel usage du déterminant et des mineurs pour détecter quand le système est de rang trop petit. Les trois déterminants que l'on écrit sont très élégants et il faut comprendre pourquoi ils sont de cette forme. De manière générale, on peut dans le plan expliciter les liens entre déterminants et alignements de points.

— 162 : Comme avant, c'est le rang d'un système linéaire qui détermine le nombre de coniques qui passent par les cinq points. Il ne faut pas oublier que résoudre un système linéaire revient à calculer une intersection d'hyperplans, ici on calcule une intersection de deux droites projectives dans un plan projectif. Le cas où la conique est unique est le cas général, et le cas où il existe une infinité de coniques est le cas où ces deux droites projectives sont confondues. On voit alors le lien entre le fait que choisir cinq points dont quatre (ou trois) sont alignés est un choix de mesure nulle, tout comme choisir deux droites dans le plan projectif et espérer qu'elles soient confondues.

— 171 : C'est parfait, en plus le développement renforce le lien déjà fort entre les coniques et les formes quadratiques. En démontrant ce théorème, on montre que l'on a compris de quoi on parle.

— 181 : Les coordonnées barycentriques rendent la résolution du problème infiniment plus simple et élégante que si l'on avait choisi des coordonnées linéaires. Donc on tient ici une jolie application du concept de barycentre.
— 191 : Beaucoup de développements à propos de coniques rentrent dans cette leçon, car les coniques sont des objets géométriques que l'on manipule grâce à notre connaissance des formes quadratiques. On transforme alors le problème originellement géométrique en un problème à propos de systèmes linéaires, que les techniques d'algèbre linéaire savent bien traiter.