Prérequis. Le seul morphisme de corps $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est l'identité.

Théorème 0.0.1. *Soit* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *une application conservant l'orthogonalité : si* ABC *est un triangle rectangle en* B*, alors* $f(A)f(B)f(C)$ *est un triangle rectangle en* $f(B)$*. Alors* f *est une similitude affine.*

Démonstration. On démontre tout par étapes.

f est injective. Si A et B sont distincts, on prend C tel que ABC soit rectangle. Alors $f(A)f(B)f(C)$ est rectangle donc $f(A) \neq f(B)$.

f conserve l'alignement. Soient A, B et C trois points alignés distincts. On choisit D tel que (AC) et (CD) soient perpendiculaires. Les triangles ACD et BCD sont rectangles en C, donc $f(A)f(C)f(D)$ et $f(B)f(C)f(D)$ sont rectangles en $f(C)$. Ainsi les droites $(f(C)f(A))$ et $(f(C)f(B))$ sont toutes les deux perpendiculaires à $(f(C)f(D))$ et passent par $f(C)$ dont $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont alignés.

En fait l'ordre est conservé. Supposons par exemple que $C \in [AB]$. Alors on peut choisir D comme avant en demandant en plus que ABD soit rectangle en D (avec un cercle). Alors $f(A)f(B)f(D)$ est rectangle en $f(D)$ et le point $f(C)$ appartient à $[f(A)f(B)]$ puisque c'est le projeté orthogonal de $f(D)$ sur $(f(A)f(B))$.

f conserve le parallélisme. Soient (AB) et (CD) des droites parallèles distinctes. La perpendiculaire à (AB) passant par A coupe (CD) en un point E que l'on peut peut supposer différent de C (quitte à échanger C et D). Les triangles $f(A)f(B)f(E)$ et $f(A)f(E)f(C)$ sont rectangles respectivement en $f(A)$ et en $f(E)$. Ainsi $(f(A)f(B))$ et $(f(C)f(E)) = (f(C)f(D))$ sont toutes les deux perpendiculaires à la même droite $(f(A)f(E))$.

Ainsi, f conserve les parallélogrammes.

f est affine. Posons :

$$\varphi \colon \begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ a &\longmapsto f(a) - f(0) \end{aligned}$$

dont on doit montrer qu'elle est linéaire.

φ est un morphisme de groupes. Soient $a, b \in \mathbf{R}^2$ et $c = a + b$. Si a et b ne sont pas colinéaires alors $0acb$ est un parallélogramme, donc $f(0)f(a)f(c)f(b)$ aussi. Ainsi $f(c) - f(a) = f(b) - f(0)$, c'est-à-dire $\varphi(c) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Si a et b sont colinéaires, cela revient à montrer le point suivant :

Pour $a \in \mathbf{R}^2$ et $t \in \mathbf{R}$, on a $\varphi(ta) = t\varphi(a)$. C'est évident si $a = 0$. Sinon, ta est sur la droite $(0a)$ donc $f(ta) \in (f(0)f(a))$, et il existe t' tel que :

$$f(ta) - f(0) = t'(f(a) - f(0)).$$

Comme $a \neq 0$, $f(a) \neq f(0)$ donc ce t' est unique. On pose $\sigma : t \mapsto t'$ et l'on montre que c'est l'identité.

σ est un morphisme de corps de R. On sait déjà que $\sigma(0) = 0$ et que $\sigma(1) = 1$. Soient $t, t' \in \mathbf{R}$ non nuls.

On choisit b tel que a et b ne soient pas colinéaires. Les points 0, ta, $b + ta$ et b forment un parallélogramme, et de même pour les points $t'a$, $(t + t')a$, $b + ta$ et b. Les images de ces deux parallélogrammes sont des parallélogrammes, donc :

$$f((t + t')a) - f(t'a) = f(ta) - f(0)$$

ce qui se réécrit $\varphi((t + t')a) = \varphi(ta) + \varphi(t'a)$ d'où $\sigma(t + t') = \sigma(t) + \sigma(t')$.

Les droites (ab) et $(tatb)$ sont parallèles donc leurs images aussi, et de même $(t'ab)$ et $(tt'atb)$ sont parallèles donc leurs images aussi. Tout cela se réécrit en $\sigma(tt') = \sigma(t)\sigma(t')$.

On conclut que σ est un morphisme de corps de $\mathbf{R}$ donc c'est l'identité, donc φ est bien linéaire donc f est affine.

f est une similitude. Comme f est injective φ l'est aussi donc c'est un automorphisme. Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$. Alors $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est aussi une base orthogonale. Comme $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont orthogonaux, $\varphi(e_1) + \varphi(e_2)$ et $\varphi(e_1) - \varphi(e_2)$ le sont aussi. Donc $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ ont la même norme $k > 0$. On voit alors que φ est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une transformation orthogonale. □

Remarques.

— C'est un peu trop long si on veut écrire beaucoup, mais il faut dire tout ça à l'oral et faire des dessins en n'écrivant que les noms des étapes. Il faut profiter de l'originalité de ce développement : contrairement à beaucoup d'autres, il ressemble un peu à une chasse au trésor où l'on utilise l'hypothèse très faible pour trouver à chaque fois des propriétés de plus en plus fortes.

— Il faut évidemment faire énormément de dessins. Souvent quelques traits sont suffisants pour que l'argument soit convaincant. On peut passer vite sur certains points, sinon on n'en finit jamais.

— La raison pour laquelle l'identité est le seul morphisme d'anneaux $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la suivante. Il est clair qu'un morphisme σ doit fixer $\mathbf{Q}$ qui est le sous-corps premier de $\mathbf{R}$ (on peut le faire à la main). Ensuite, il suffit de montrer que σ est forcément continu. Pour cela, on remarque qu'il préserve l'ordre : si $x \geqslant 0$ alors disons $x = y^2$, puis $\sigma(x) = \sigma(y)^2 \geqslant 0$. En particulier, si $|a - b| \leqslant 1/n$, on obtient $|\sigma(a) - \sigma(b)| \leqslant |\sigma(1)|/n = 1/n$. Et le seul prolongement continu de l'identité sur $\mathbf{Q}$ à tout $\mathbf{R}$ est l'identité.

— Il faut bien insister sur le côté magique du résultat. L'hypothèse sur f est vraiment, vraiment très faible !

Recasages.

- 161 : On peut carrément faire une partie dans le plan qui traite des similitudes, si l'on veut. On fait à un moment usage de la métrique sur la plan affine, quand on dit qu'il existe un D qui rende ABD triangle. Pour le construire, on construit le cercle de diamètre $[AB]$ et on choisit D à l'intersection entre ce cercle et la perpendiculaire à (AB) passant par C. En quelque sorte, on peut donc mettre ce développement après des propriétés des triangles isocèles si l'on veut. Bon, ce n'est quand même pas le cœur du développement.
- 191 : On ne s'attend absolument pas, en lisant l'énoncé, à devoir reconnaître des morphismes de corps ! Bon à part ça, c'est un peu léger, alors il faut mettre ce fait en valeur.