Prérequis. Aucun.

Théorème 0.0.1. *Soient $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)} \in \mathbf{C}$ des points du plan complexe définissant un polygone P_0. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit :*

$$z_i^{(k+1)} = \frac{z_i^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}}{2}$$

en convenant que $z_{n+1} = z_1$. Chaque n-uplet $(z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$ définit le polygone P_k. Alors la suite (P_k) converge vers le polygone dégénéré concentré en l'isobarycentre de P_0.

Démonstration. Notons $z^{(k)} = (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. La définition de la suite $(z^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ se réécrit :

$$z^{(k+1)} = Az^{(k)} = A^k z^{(0)}, \text{ avec } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On étudie alors les valeurs propres de la matrice A. On pose :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

qui est un bloc de Jordan auquel on a rajouté un 1 en bas à gauche. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, on a :

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

En particulier $J^n = I_n$ donc J se diagonalise en $D = \operatorname{diag}(\omega^j : 0 \leqslant j < n)$ avec $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Ainsi, $P(J)$ se diagonalise en $P(D)$ et donc $\det P(J) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

Ici, on a $A = \frac{1}{2}(I_n + J)$, et plus généralement $XI_n - A = (X - \frac{1}{2})I_n - \frac{1}{2}J$ d'où :

$$\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \frac{1+\omega^j}{2} \right).$$

Ce polynôme est à racines simples donc A se diagonalise avec les valeurs propres écrites ci-dessus, et donc A^k converge (géométriquement, pour n'importe quelle norme d'algèbre donc pour n'importe quelle norme) vers une matrice B qui est conjuguée à $\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$. Comme $X = (1, \dots, 1)$ est point fixe de A et donc à la limite point fixe de B qui est de rang 1, on a $B = (b_1 X, \dots, b_n X)$. Comme A préserve les isobarycentres, à la limite B aussi donc chaque b_i vaut $1/n$, ce qui conclut. $\square$

Remarques.

- On peut, au lieu de définir chaque point comme étant le milieu d'un segment, le définir comme étant une combinaison convexe de ces deux points avec un coefficient $\lambda \in]0, 1[$. On a démontré le cas $\lambda = 1/2$, mais le résultat reste vrai pour tout λ.
- Il ne faut pas hésiter à commencer le développement en dessinant un polygone et en itérant deux ou trois fois la construction. Ça donne l'idée intuitive derrière la démonstration.

Recasages.

- 149 : On calcule de manière exacte des valeurs propres, et même toutes les valeurs propres de toutes les matrices circulantes. Et l'on voit aussi comment les valeurs propres influencent le comportement asymptotique de la suite (A^k), ce qui bien sûr est central dans cette leçon.
- 152 : On obtient un calcul de déterminant très élégant car il ne demande pas de gros calculs, juste un peu de réduction. Et l'on obtient une conséquence géométrique très intuitive, ce qui peut adoucir le côté trop abstrait de la leçon.
- 181 : Dans cette leçon le développement rentre parfaitement, encore mieux si l'on remplace le 1/2 par un $\lambda \in]0, 1[$ quelconque fixé.
- 226 : La suite $(z^{(k)})$ est une suite vectorielle définie par une relation du type $z^{(k+1)} = f(z^{(k)})$, ici f est linéaire. On peut en particulier faire le lien (fort) entre ce développement discret et l'étude qualitative des équations différentielles linéaires, où le spectre de la matrice détermine le comportement asymptotique des solutions.