

**Prérequis.** Inclure au moins la définition et la proposition suivantes dans le plan.  
Soient  $p$  un nombre premier et  $\tau$  un réel quelconque.

**Définition 0.0.1.** La *valuation  $p$ -adique penchée de pente  $\tau$*  est la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[t] &\longrightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\} \\ v_{p,\tau} : \sum_i a_i t^i &\longmapsto \min\{v_p(a_i) - \tau i : a_i \neq 0\} \end{aligned}$$

en ayant convenu que  $v_{p,\tau}(0) = \infty$ . Pour  $f = \sum_i a_i t^i \in \mathbf{Q}[t]$ , on pose aussi  $m_{p,\tau}(f)$  (resp.  $M_{p,\tau}(f)$ ) le plus petit (resp. le plus grand)  $i$  tel que  $v_{p,\tau}(f) = v_p(a_i) - \tau i$ . Une *pente du polygone de Newton  $p$ -adique de  $f$*  est une pente  $\tau$  telle que la *largeur*  $\Delta_{p,\tau}(f) = M_{p,\tau}(f) - m_{p,\tau}(f)$  soit strictement positive.

**Proposition 0.0.2.** On a :

1.  $v_{p,\tau}(f) = \infty$  si et seulement si  $f = 0$  ;
2.  $v_{p,\tau}(fg) = v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g)$  ;
3.  $v_{p,\tau}(f + g) \geq \min(v_{p,\tau}(f), v_{p,\tau}(g))$  ;
4. si  $f$  et  $g$  sont non nuls, alors  $M_{p,\tau}(fg) = M_{p,\tau}(f) + M_{p,\tau}(g)$  et  $m_{p,\tau}(fg) = m_{p,\tau}(f) + m_{p,\tau}(g)$  ;
5.  $\Delta_{p,\tau}(fg) = \Delta_{p,\tau}(f) + \Delta_{p,\tau}(g)$ .

*Démonstration.* 1. Immédiat.

2. Si  $f = \sum_i a_i t^i$  et  $g = \sum_i b_i t^i$  alors  $fg = \sum_i c_i t^i$  avec  $c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$ . On a alors  $v_p(c_i) \geq \min\{v_p(a_j) + v_p(b_{i-j})\}$  d'où :

$$v_p(c_i) - \tau i \geq \min\{(v_p(a_j) - \tau j) + (v_p(b_{i-j}) - \tau(i-j))\}$$

donc  $v_{p,\tau}(fg) \geq v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g)$ .

Pour l'inégalité réciproque : on pose  $r = m_{p,\tau}(f)$  et  $s = m_{p,\tau}(g)$ . Alors  $c_{r+s} = \sum_{j=0}^{r+s} a_j b_{r+s-j}$ , le terme en  $j = r$  étant de valuation  $v_p(a_r b_s) = \tau(r+s) + v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g)$  et les autres termes étant de valuation plus grande. Ainsi :

$$v_p(c_{r+s}) = \tau(r+s) + v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g)$$

d'où :

$$v_{p,\tau}(fg) \leq v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g).$$

3. Immédiat.
4. Avec les notations qui précèdent, si  $i < r + s$  alors chaque terme de  $\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$  est de valuation  $> \tau i + v_{p,\tau}(f) + v_{p,\tau}(g)$  donc  $m_{p,\tau}(fg) = r + s$ . La démonstration est la même pour  $M_{p,\tau}$ .
5. Immédiat avec le point précédent.

□

**Définition 0.0.3.** On définit le *dénominateur réduit* d'une pente  $\tau \in \mathbf{Q}$  comme le plus petit entier  $q > 0$  tel que  $\tau q \in \mathbf{Z}$ .

**Lemme 0.0.4.** Soit  $\tau \in \mathbf{Q}$  de dénominateur réduit  $q$ . Alors l'image de la fonction  $v_{p,\tau}$  (en enlevant 0 qui est envoyé sur  $\infty$ ) est  $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$ .

*Démonstration.* Il est clair que  $v_{p,\tau}(\mathbf{Q}[t] \setminus \{0\})$  est inclus dans  $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$ . Réciproquement, tout élément de  $\frac{1}{q}\mathbf{Z}$  s'écrit  $a + \tau b$  avec  $a \in \mathbf{Z}$  et  $b \in \mathbf{N}$ , et alors  $p^a t^b$  convient.  $\square$

**Théorème 0.0.5** (critère de Dumas). Soit  $h \in \mathbf{Q}[t]$  tel que  $h(0) \neq 0$ . S'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $h$  admette une pente  $\tau$  de largeur  $\Delta_{p,\tau}(h) = \deg h$  et de dénominateur réduit  $\deg h$  alors  $h$  est irréductible.

*Démonstration.* Comme la largeur est égale à  $\deg h$  on a nécessairement  $m_{p,\tau}(h) = 0$  et  $M_{p,\tau}(h) = \deg h$ . Si  $h$  se factorise en  $h = fg$  alors d'après la proposition on a aussi  $m_{p,\tau}(f) = m_{p,\tau}(g) = 0$ ,  $M_{p,\tau}(f) = \deg f$  et  $M_{p,\tau}(g) = \deg g$ . Ainsi d'après le lemme,  $\Delta_{p,\tau}(f) = \deg f$  et  $\Delta_{p,\tau}(g) = \deg g$  sont multiples du dénominateur réduit qui est  $\deg h$ . Comme  $\deg f + \deg g = \deg h$ , l'un des deux degrés de  $f$  ou de  $g$  doit être nul.  $\square$

**Théorème 0.0.6** (critère d'Eisenstein). Soit  $h = \sum_{i=0}^d a_i t^i \in \mathbf{Q}[t]$ . S'il existe un nombre premier  $p$  tel que  $v_p(a_0) = 1$ ,  $v_p(a_d) = 0$  et  $v_p(a_i) \geq 1$  pour les autres  $i$ , alors  $h$  est irréductible.

*Démonstration.* C'est une application directe du critère de Dumas, avec la pente  $\tau = -\frac{1}{\deg h}$ .  $\square$

### Remarques.

- Bien sûr, tout faire est trop long. Justement, c'est bien : on peut choisir ce que l'on veut bien démontrer. C'est surtout les points 4 et 5 qui nous intéressent dans la proposition, donc bien sûr c'est inutile de démontrer le 2 dans le développement. Le lemme est assez immédiat et c'est le sens facile qui nous intéresse. Le cœur du développement est donc évidemment dans les critères de Dumas et Eisenstein, qui une fois les polygones de Newton introduits, sont très visuels.
- C'est de bon goût, je pense, de faire une partie ou une sous-partie qui parle des polygones de Newton. Ça donne des jolis dessins et une manière très visuelle de voir l'irréductibilité des polynômes. Le livre *Petit compagnon des nombres* en parle très bien, et c'est intéressant d'au moins lire la page Wikipédia à leur sujet.
- Le jury risque de poser une question sur la démonstration "usuelle" du critère d'Eisenstein, qui consiste à réduire la factorisation  $h = fg$  modulo  $p$  puis à discuter des valuations des coefficients. La discussion risque d'être intéressante dans la leçon 122, mais pas tant dans la leçon 141. C'est quand même bien de connaître au moins l'idée, et l'intérêt de passer par les polygones de Newton (en l'occurrence, le critère de Dumas est beaucoup plus général).
- C'est important de connaître les interprétations visuelles. On trace dans le plan les points  $(i, v_p(a_i))$ . Le polygone de Newton est formé de l'enveloppe convexe

de ces points et de tout ce qu'il y a au-dessus. La valuation penchée  $v_{p,\tau}(f)$  est alors la plus haute ordonnée à l'origine d'une droite qui reste en-dessous de tous ces points (cette droite est un hyperplan de soutien du polygone de Newton). Les nombres  $m_{p,\tau}(f)$  et  $M_{p,\tau}(f)$  sont respectivement la plus petite et la plus grande abscisse où la droite touche le polygone. Le critère de Dumas dit que s'il existe un polygone de Newton de  $f$  avec un segment reliant le point d'abscisse 0 et celui d'abscisse  $\deg f$  ne rencontrant aucun autre point, alors  $f$  est irréductible. Le critère d'Eisenstein est le cas particulier avec les points  $(0, 1)$  et  $(\deg f, 0)$ .

**Recasages.**

- 122 : Pas la meilleure leçon mais le critère d'Eisenstein est valable dans tous les anneaux factoriels. Attention cette démonstration fonctionne dans les anneaux de la forme  $K[t]$  avec  $K$  un corps valué, genre  $\mathbf{Q}$  avec les valuations  $p$ -adiques ou  $k(x)$  avec l'ordre d'annulation en un point. Donc pas tous les anneaux factoriels.
- 141 : Là c'est vraiment parfait, même qu'une partie sur les polygones de Newton est bienvenue. Attention, ça peut demander un peu de recul sur la notion : il existe par exemple des polytopes de Newton importants en géométrie tropicale.