Prérequis. Décompositions de Dunford et de Jordan ; deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables.

Définition 0.0.1. Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$\mathrm{ad}_u \colon \begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto uv - vu. \end{aligned}$$

Théorème 0.0.2. *Soient E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si* $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2)$.

Démonstration. Commençons par écrire la décomposition de Dunford $u = d + n$, où d est diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$.

Montrons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $n = uv - vu$. On commence par traiter le cas où u est le bloc de Jordan standard J_k de taille k. On pose $M_k = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, k)$ et l'on vérifie immédiatement que $J_k M_k - M_k J_k = J_k$, qui est bien la partie nilpotente de J_k.

Dans le cas général, notons F_λ le sous-espace caractéristique de E pour u associé à une valeur propre λ. La restriction de u à F_λ est alors de la forme $\lambda \mathrm{id}_{F_\lambda} + n_{F_\lambda}$ avec n_{F_λ} nilpotent. Par décomposition de Jordan, dans une certaine base de F_λ, la matrice N_λ de n_{F_λ} est diagonale par blocs $\mathrm{diag}(J_{k_1}, \ldots, J_{k_s})$ avec $k_1 + \ldots + k_s = \dim F_\lambda$. On voit immédiatement que $V_\lambda = \mathrm{diag}(M_{k_1}, \ldots, M_{k_s})$ vérifie $N_\lambda = N_\lambda V_\lambda - V_\lambda N_\lambda$. Comme l'identité commute avec V_λ et $u|_{F_\lambda} = \lambda \mathrm{id}_{F_\lambda} + n_{F_\lambda}$, l'endomorphisme v_λ de F_λ associé à V_λ dans la base de jordanisation convient : $n_{F_\lambda} = u|_{F_\lambda} v_\lambda - v_\lambda u|_{F_\lambda}$.

Il suffit alors de recoller tous les v_λ en un $v \in \mathcal{L}(E)$, ce qui est possible puisque $E = \bigoplus_\lambda F_\lambda$.

Supposons que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2)$. Cette condition équivaut bien sûr à $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_u) = 0$. Comme n commute avec u (il commute avec d et lui-même donc avec $n + d = u$, ou plus court : c'est un polynôme en u), on a $n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u)$. La première étape montre que $n \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_u)$ donc $n = 0$ et u est diagonalisable.

Réciproquement, supposons u diagonalisable. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, posons :

$$\psi_f \colon \begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto fv, \end{aligned} \qquad \phi_f \colon \begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto vf. \end{aligned}$$

Alors $\psi_f^k = \psi_{f^k}$ et $\phi_f^k = \phi_{f^k}$. Ainsi, les polynômes annulateurs de u annulent aussi ψ_u et ϕ_u : ces deux applications linéaires sont donc diagonalisables. Mais ils commutent, donc ils sont diagonalisables dans une même base, qui diagonalise alors aussi $\mathrm{ad}_u = \psi_u - \phi_u$. Ainsi ad_u est diagonalisable, d'où $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2)$. $\square$

Remarques.

- Il faut absolument savoir expliquer la décomposition de Dunford qui est centrale ici. Soit on peut le justifier de la manière "usuelle" (décomposer l'espace en sous-espaces caractéristiques, etc) soit on peut expliquer la manière algorithmique qui consiste à appliquer une méthode de Newton en partant de u pour arriver à la partie diagonalisable.
- De même, il faut bien connaître la décomposition de Jordan. On peut soit connaître les idées de la démonstration "usuelle", soit savoir que l'on peut la déduire du théorème de structure des modules (de torsion et) de type fini sur un anneau principal (c'est un corollaire de l'existence des formes normales de Smith, dont on déduit aussi le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, et le théorème de réduction de Frobenius).
- On peut passer assez vite sur le passage de bloc de Jordan à sous-espace caractéristique à cas général. Une fois qu'on a fait le cas de Jordan et qu'on a expliqué pourquoi ça marchait avec une valeur propre car l'identité commute avec tout, le recollement ne demande pas d'effort. Bien sûr, il faut savoir justifier pourquoi $E = \bigoplus_\lambda F_\lambda$: c'est parce que le corps de base est $\mathbf{C}$ (ou n'importe quel corps algébriquement clos).
- L'équivalence entre $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$ et $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = 0$ doit bien sûr être maîtrisée parfaitement, surtout qu'elle est vraiment facile (et on n'a besoin que du sens le plus facile).
- Il faut savoir expliquer pourquoi deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont codiagonalisables. Les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- On parle de ad_u, il faut donc savoir pourquoi on l'appelle comme ça. C'est la *représentation adjointe* de l'algèbre de Lie des matrices carrées à coefficients complexes.
- On peut penser qu'on tient ici un super algorithme pour déterminer si une matrice est diagonalisable. Attention, la diagonalisabilité d'une matrice de taille n s'exprime ici avec des noyaux d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$, c'est-à-dire des pivots de Gauss sur des matrices de taille n^2. Comme le pivot de Gauss sur une matrice de taille m se fait en $O(m^3)$ opérations, on finit avec un critère de diagonalisabilité qui se calcule explicitement en $O(n^6)$ opérations. Il y a plus rapide : on peut calculer le polynôme minimal μ de M en calculant la forme normale de Smith de $XI - M$, et regarder si μ et μ' sont premiers entre eux. Avec un pivot de Gauss puis un algorithme d'Euclide, on obtient une complexité en $O(n^3)$.

Recasages.

- 153 : C'est vraiment bien ici. On utilise les critères de diagonalisabilité avec les polynômes, la codiagonalisabilité et la décomposition de Dunford. C'est difficile de trouver meilleur développement.
- 155 : On a un critère de diagonalisabilité qui s'exprime avec le calcul de deux noyaux, c'est quand même assez joli. Voir la dernière remarque quand même : ce

n'est pas vraiment viable comme algorithme. On peut quand même s'amuser à regarder ce que ça fait sur des matrices 2×2 ou (avec beaucoup de courage pour les noyaux de matrices 9×9) sur des matrices 3×3.

— 157 : C'est une jolie application de la décomposition de Dunford et de la décomposition de Jordan. Donc ça rentre à la fois dans le côté trigonalisable et dans le côté nilpotent ! (C'est important de ne pas trop séparer ces deux notions dans la leçon.)