Prérequis. Théorème d'holomorphie sous l'intégrale

Définition 0.0.1. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$. Une fonction mesurable $\rho : I \to \mathbf{R}$ strictement positive telle que $\int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ s'appelle une *fonction de poids*. On obtient alors un espace de Hilbert :

$$\mathrm{L}^2_\rho = \{f : I \to \mathbf{C} \text{ mesurable} \mid \int_I |f|^2\rho < +\infty\}/(= \text{ p.p.}) = \mathrm{L}^2(I, \rho(x)\,\mathrm{d}x)$$

muni du produit hermitien $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f\overline{g}\rho$.

Théorème 0.0.2. *Si ρ est une fonction de poids et s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :*

$$\int_I \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors les polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, obtenus en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans L^2_ρ, est une base hilbertienne de cet espace.

Démonstration. C'est déjà une famille orthonormée, il suffit donc de montrer qu'elle est totale. Par théorème du supplémentaire orthogonal, il suffit donc de montrer que si $f \in \mathrm{L}^2_\rho$ est telle que $\langle f, P\rangle_\rho = 0$ pour tout polynôme P alors $f = 0$ dans L^2_ρ.

Posons $\varphi = f\rho\mathbf{1}_I$ définie sur $\mathbf{R}$. Alors φ est intégrable car f et $\mathbf{1}_I$ sont dans L^2_ρ. On va calculer sa transformée de Fourier et montrer qu'elle est nulle.

Posons $B_a = \{z \in \mathbf{C} \mid |\mathfrak{Im}(z)| < a/2\}$, et $g(z,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}f(x)\rho(x)$ définissant g sur $B_a \times I$. Pour $z \in B_a$, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x &= \int_I \mathrm{e}^{\mathfrak{Im}(z)x}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \mathrm{e}^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \sqrt{\int_I \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

qui est fini par hypothèse sur ρ et car $f \in \mathrm{L}^2_\rho$. Ainsi, $g(z,-)$ est intégrable pour tout $z \in B_a$ ce qui nous permet de considérer :

$$F(z) = \int_I g(z,x)\,\mathrm{d}x.$$

On a clairement $F|_\mathbf{R} = \widehat{\varphi}$, montrons alors que F est holomorphe puis nulle.

On applique le théorème d'holomorphie sous l'intégrale :

— Pour tout $z \in B_a$, la fonction $g(z,-)$ est bien mesurable (elle est même intégrable).

— Pour tout $x \in I$, la fonction $g(-,x)$ est bien holomorphe.

— Pour tous $z \in B_a$ et $x \in I$, on a la domination :

$$|g(z,x)| \leqslant \mathrm{e}^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x)$$

comme précédemment, qui est intégrable.

Ainsi, F est holomorphe, et l'on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$F^{(n)}(z) = \int_I (-\mathrm{i}x)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\ \mathrm{d}x$$

d'où en particulier :

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

ce qui montre que $F = 0$ sur B_a. Ainsi $\widehat{\varphi} = 0$ puis $\varphi = 0$, d'où $f = 0$. □

Remarques.

- Il faut bien sûr connaître le procédé de Gram-Schmidt et des exemples de familles de polynômes orthogonaux. On peut par exemple citer :
  - Les polynômes de Legendre, avec $I = [-1, 1]$ et $\rho = 1$;
  - Les polynômes de Tchebychev, avec $I =]-1, 1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
  - Les polynômes de Hermite, avec $I = \mathbf{R}$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$;
  - Les polynômes de Laguerre, avec $I = [0, +\infty[$ et $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
- De même, il faut savoir montrer que L^2_ρ est un espace de Hilbert. La démonstration est exactement la même que pour montrer que L^2 est un espace de Hilbert (d'ailleurs c'est la même, puisque L^2_ρ est un espace L^2), donc elle n'est pas très intéressante.
- Il faut bien se rappeler que pour le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, on ne demande pas de majoration de la dérivée, mais bien une majoration de la fonction elle-même. C'est bien de savoir pourquoi : on utilise le théorème de Morera pour démontrer ce théorème, mais pour obtenir l'expression de la dérivée, on applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la domination venant des inégalités de Cauchy.

Recasages.

- 201 : Le développement n'est pas le plus original pour cette leçon, mais il rentre bien dans une partie sur les espaces L^p. Attention quand même à ne pas trop étaler dessus parce que la démonstration s'écarte un peu du thème de la leçon.
- 209 : L'approximation de fonctions est très liée aux bases hilbertiennes, puisqu'une base hilbertienne fournit une approximation de tous les éléments de l'espace préhilbertien par des combinaisons linéaires de fonctions simples. Les théorèmes de densité sont souvent bienvenus dans cette leçon.
- 213 : On illustre bien le théorème du supplémentaire orthogonal (enfin, son corollaire qui est le critère de densité) qui n'est valable que dans les espaces de Hilbert, et l'on introduit un espace de Hilbert intéressant. Malheureusement le seul raisonnement hilbertien que l'on fait est au tout début, le reste n'a plus grand chose à voir. Attention à la redondance si l'on choisit aussi le développement sur l'espace de Bergman.
- 234 : On obtient un espace de fonctions L^2 dont on sait donner une jolie base hilbertienne autre que les polynômes trigonométriques. On utilise le fait que le

produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable, ce qui est assez dans le thème.

- 239 : C'est une très jolie illustration du théorème d'holomorphie sous l'intégrale, surtout qu'on ne s'y attend pas trop en lisant l'énoncé du théorème. Attention à la manière d'incruster le développement dans le plan par contre. Le mieux, c'est de le mettre juste après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale.
- 245 : On utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale et le fait que les fonctions holomorphes sont développables en série entière, tout ça pour démontrer un théorème qui pourrait n'avoir aucun rapport avec $\mathbf{C}$. Par contre le développement n'est pas très original, surtout qu'il y a beaucoup de développements possibles et meilleurs dans cette leçon.
- 250 : Le développement y rentre très bien parce qu'on utilise l'injectivité de la transformée de Fourier pour démontrer un résultat qui a priori n'a aucun rapport. Il se trouve juste qu'il est plus facile de montrer que la transformée de Fourier de f est nulle, que de démontrer directement que f l'est. Donc c'est une jolie application.