Prérequis. Sommation des relations de comparaison, équivalent de la série harmonique

Théorème 0.0.1. *Soient $b > 0$ et $f : [0, b] \to \mathbf{R}$ tels que :*

1. *f est continue ;*
2. *f est croissante ;*
3. *$f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, b]$, on a $f(x) < x$;*
4. *Il existe $\lambda > 0$ et $R > 1$ tels que lorsque $x \to 0$:*

$$f(x) = x - \lambda x^R + o(x^R).$$

Pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ reste à valeurs dans $]0, b[$, tend vers 0 et plus précisément :

$$u_n \sim \frac{K}{n^{\frac{1}{R-1}}}, \qquad K = (\lambda(R-1))^{\frac{1}{1-R}}.$$

Démonstration. Par croissance de f, celle-ci ne peut pas s'annuler ailleurs qu'en 0 (sinon le développement asymptotique 4 serait faux). Ainsi pour tout $x \in]0, b[$, on a $0 < f(x) < x < b$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

D'après 3, la suite est décroissante en plus d'être positive, donc elle converge vers un $\ell \in [0, b]$, qui par continuité doit être un point fixe de f. D'après ce qui précède, cela entraîne $\ell = 0$. Il reste donc juste à démontrer l'équivalent pour u_n.

D'après 4, on a $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n^R} \to -\lambda$. Un dessin avec la courbe $y = x^{-R}$ suggère que ce quotient soit équivalent à $\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^R} = \frac{u_n^{1-R}-u_{n+1}^{1-R}}{1-R}$, ce que l'on va vérifier. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n^{1-R} - u_{n+1}^{1-R}}{1-R} &= \frac{1}{1-R}\left(u_n^{1-R} - (u_n - \lambda u_n^R + o(u_n^R))^{1-R}\right) \\
&= \frac{u_n^{1-R}}{1-R}(1 - (1 - \lambda \underbrace{u_n^{R-1}}_{\to 0} + o(u_n^{R-1}))^{1-R}) \\
&= \frac{u_n^{1-R}}{1-R}\left(1 - (1 - (1-R)\lambda u_n^{R-1} + o(u_n^{R-1})\right) \\
&= \lambda + o(1) \sim \lambda.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda = +\infty$, la sommation des relations de comparaison montre que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-R} - u_{k+1}^{1-R}}{1-R} \sim \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = n\lambda$$

ce qui par téléscopage montre que :

$$\frac{u_0^{1-R} - u_n^{1-R}}{1-R} \sim n\lambda$$

ce qui donne le résultat annoncé. $\square$

Proposition 0.0.2. *Si l'on pose* $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *et* $u_0 > 0$ *quelconque, alors on obtient d'après ce qui précède* $u_n \sim 2/n$. *On peut pousser le développement asymptotique plus loin pour obtenir :*

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la méthode précédente, avec plus de précision :

$$\begin{aligned}
\frac{u_n^{-1} - u_{n+1}^{-1}}{-1} &= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \\
&= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{\ln(1+u_n)} - 1\right) \\
&= u_n^{-1}\left(\frac{1}{1 - u_n/2 + u_n^2/3 + o(u_n^2)} - 1\right) \\
&= u_n^{-1}\left(1 + \left(\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) + \left(\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^2 + o(u_n^2) - 1\right) \\
&= u_n^{-1}\left(\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^2}{4} + o(u_n^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o(u_n).
\end{aligned}$$

En posant alors $v_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$, on a $v_n \sim \frac{-u_n}{12} \sim \frac{-1}{6n}$. Comme la série $\sum \frac{1}{6n}$ diverge, on obtient :

$$u_n^{-1} - u_0^{-1} - \frac{n}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{6k} \sim -\frac{1}{6}\ln(n).$$

Finalement on obtient $u_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln n + o(\ln n)\right)^{-1}$ ce qui après un développement limité de $\frac{1}{1-x}$ donne le résultat annoncé. $\square$

Remarques.

- Le développement est technique et calculatoire, mais le résultat est très général donc c'est plutôt joli. On peut aussi l'appliquer au sinus par exemple. Même sans pousser le raisonnement jusqu'au bout, on obtient l'idée à partir d'un développement asymptotique de f d'estimer les différences de la suite à une certaine puissance pour obtenir un équivalent simple.
- L'équivalence de la série harmonique avec le logarithme se fait par comparaison série-intégrale.
- On commence à voir dans la seconde proposition qu'il peut être difficile d'aller plus loin dans le développement asymptotique, car il faut s'assurer de pouvoir sommer les relations de comparaison.
- Il faut faire des dessins ! Un premier pour donner une allure du graphe de f au tout début, puis au moins un autre pour donner l'idée de comparer avec l'intégrale.

Recasages.

— 223 : C'est très bien dans cette leçon, on donne une manière d'étudier les comportements asymptotiques de toute une famille de suites numériques, et l'on illustre ses connaissances sur les relations de comparaison.

— 224 : Pas mieux, on passe littéralement du développement asymptotique d'une fonction à celui des suites qu'elle définit, et on donne même un exemple (on peut en donner beaucoup d'autres pour remplir le plan).

— 226 : Là aussi, on est en plein dans le thème, parmi les suites définies par récurrence on sait contrôler toutes celles définies par une fonction assez bien connue autour de 0.

— 230 : C'est surtout pour la sommation des relations de comparaison qui arrive plusieurs fois, ici dans le comportement des sommes partielles. On utilise ainsi la divergence de certaines séries et des équivalents de sommes partielles. Attention, l'énoncé du développement peut faire croire que c'est hors-sujet, il faut donc bien l'annoncer comme application du théorème de sommation des relations de comparaison.