Prérequis. Formule de la moyenne, théorème de Riesz-Fischer, théorème de Weierstrass, critère de densité dans les espaces de Hilbert, formule de Cauchy, théorème de Riesz, égalité de Bessel

Théorème 0.0.1. *Notons* $\mathbf{D}$ *le disque unité (ouvert) complexe, et* $\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D}) = \mathrm{L}^2(\mathbf{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{D})$ *l'espace* de Bergman *des fonctions holomorphes et de carré intégrable sur* $\mathbf{D}$*, muni du produit hermitien de* L^2, $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{D}} f\overline{g}$*. Alors :*

1. $\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ *est un espace de Hilbert ;*
2. *La famille* $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$ *en est une base hilbertienne ;*
3. *La fonction* $K : (z, w) \mapsto \frac{1}{\pi(1-z\overline{w})^2}$ *en est un noyau reproduisant : pour tout* $f \in \mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$,
$$f = \int_{\mathbf{D}} f(w)K(-, w).$$

Démonstration. On commence par un lemme crucial qui relie les topologies des espaces $\mathrm{L}^2(\mathbf{D})$ et $\mathcal{H}(\mathbf{D})$.

Lemme 0.0.2. *Pour tout* $f \in \mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ *et tout compact* $K \subset \mathbf{D}$*, on a :*

$$\|f\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \mathbf{S}^1)} \|f\|_2.$$

Démonstration. Soient $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(a, r) \subset \mathbf{D}$. Pour tout $\rho < r$, on a la formule de la moyenne :
$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta$$
ce qui permet de calculer l'intégrale en polaire :

$$\begin{aligned}\int_{\overline{D}(a,r)} f &= \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta\rho\ \mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r 2\pi\rho f(a)\ \mathrm{d}\rho = \pi r^2 f(a).\end{aligned}$$

Grâce à cela on peut majorer avec Cauchy-Schwarz :

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \sqrt{\int_{\overline{D}(a,r)} |f|^2} \sqrt{\int_{\overline{D}(a,r)} 1} \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_2 \sqrt{\pi} r = \frac{\|f\|_2}{\sqrt{\pi} r}.$$

On fait alors tendre r vers $1 - |a| = d(a, \mathbf{S}^1) \geqslant d(K, \mathbf{S}^1)$ pour obtenir le résultat. ☐

On peut maintenant contrôler les deux topologies en même temps, et démontrer le théorème.

$\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ est un espace de Hilbert. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$, elle est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{D})$ donc elle converge vers une certaine fonction f qui est de carré intégrable. Le lemme permet alors de contrôler la norme uniforme : pour tout compact K de $\mathbf{D}$ et tous $m, n \in \mathbf{N}$,

$$\|f_m - f_n\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K,\mathbf{S}^1)}\|f_m - f_n\|_2$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi de Cauchy pour la topologie métrisable de la convergence uniforme sur tout compact, et par théorème de Weierstrass on dispose d'une fonction holomorphe g vers laquelle les f_n convergent uniformément sur tout compact. Comme f_n converge à extraction près vers f presque partout, on a $g = f$ presque partout et donc $f \in \mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ ce qui conclut.

Les e_n forment une base hilbertienne. On a juste à calculer par passage en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\langle e_p, e_q\rangle &= \int_{\mathbf{D}} \sqrt{\frac{p+1}{\pi}}\sqrt{\frac{q+1}{\pi}} z^p \overline{z}^q \,\mathrm{d}z \\ &= \sqrt{\frac{(p+1)(q+1)}{\pi^2}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^{p+q+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-q)} \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

qui vaut 0 si $p \neq q$. Si $p = q$, alors :

$$\langle e_p, e_p\rangle = 2\pi\frac{p+1}{\pi}\int_0^1 \rho^{2p+1} \,\mathrm{d}\rho = 1.$$

Reste donc à montrer que la famille est totale. On applique le critère de densité, donc on choisit f orthogonale à tous les e_n et l'on montre que $f = 0$. Pour cela on développe f en série entière au voisinage de 0, disons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On a alors la formule de Cauchy pour $r \in [0, 1[$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta,$$

qui permet de calculer :

$$\begin{aligned}0 = \langle f, e_n\rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{\mathbf{D}} f(z)\overline{z}^n \,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} r^n r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_0^1 2\pi r^n a_n r^n r \,\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\frac{2\pi}{2n+2}a_n \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}a_n\end{aligned}$$

d'où $a_n = 0$ pour tout n et donc $f = 0$.

La fonction K est un noyau reproduisant. Pour $z \in \mathbf{D}$, posons :

$$\ell_z \colon \begin{aligned} \mathrm{L}^2_a(\mathbf{D}) &\longrightarrow \mathbf{C} \\ f &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

la forme d'évaluation, qui est linéaire, et continue grâce au lemme. D'après le théorème de Riesz on dispose de $k_z \in \mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ tel que $\ell_z = \langle -, k_z \rangle$. On note alors pour tout $z \in \mathbf{D}$:

$$K(z, -) = \overline{k_z}.$$

D'une part, l'égalité de Bessel donne :

$$K(z,-) = \overline{k_z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle k_z, e_n \rangle e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, k_z \rangle \overline{e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z) \overline{e_n}$$

d'où la propriété de noyau reproduisant :

$$\int_{\mathbf{D}} f(w) K(z,w) \, \mathrm{d}w = \langle f, \overline{K(z,-)} \rangle = \langle f, k_z \rangle = f(z),$$

et d'autre part comme il y a convergence L^2 de la somme donc aussi sur tout compact d'après le lemme, on a :

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z) \overline{e_n}(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} z^n \overline{w}^n = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}.$$

$\square$

Remarques.

— C'est très clairement trop long de tout faire dans les détails en quinze minutes. Il faut donc faire une petite recette en fonction de la leçon dans laquelle on place le développement. Attention à toujours démontrer le lemme, qui contient l'essentiel de la magie du développement. La majoration de la norme uniforme par la norme L^2 est exceptionnelle, et provient du miracle qu'est la théorie des fonctions holomorphes. On en déduit tout le reste sans trop d'efforts.

— C'est vraiment mieux si l'on fait des dessins pour expliquer le raisonnement, notamment lors de la démonstration du lemme. On peut faire un dessin du disque unité, d'un compact K, du point a et du rayon r que l'on fait tendre vers la distance de a au cercle. C'est vraiment très important pour ne pas perdre l'auditoire.

— On voit dans la démonstration que les racines carrées dans la définition des e_n sont un peu inutiles, elles servent juste à ce que $\|e_n\|_2 = 1$. C'est important pour le troisième point car on utilise l'égalité de Bessel, mais dans la démonstration du second point on peut écrire des $\sqrt{\cdots}$ pour aller plus vite. L'important est que les z^n sont orthogonales.

— Pour justifier que (e_n) est une famille totale, on pourrait vouloir écrire :

$$0 = \langle f, e_n \rangle = \langle \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m, e_n \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \sqrt{\frac{\pi}{m+1}} \langle e_m, e_n \rangle$$

d'où $a_m = 0$ pour tout m en choisissant $m = n$, en justifiant que l'on peut sortir la somme du produit hermitien par continuité. Ce raisonnement est faux, et c'est un piège qui apparaît plusieurs fois dans le développement sans crier gare. Il faut absolument être au courant de son existence : les sommes infinies en jeu sont parfois des sommes au sens L^2, et parfois des sommes au sens de la convergence uniforme sur tout compact. Ici la somme à l'intérieur est convergente sur tout compact, mais pas nécessairement L^2 donc la continuité de $\langle -, - \rangle$ pour la topologie L^2 ne permet pas de sortir la somme. On retrouve cela quand on calcule $K(z, w)$, en disant que la somme est convergente dans L^2 donc, grâce au lemme, est convergente uniformément sur tout compact.

— Dans la même lignée, il peut être instructif de souligner (au moins en entraînement, et même peut-être à l'oral) pour chaque somme si elle est convergente dans L^2 ou uniformément sur tout compact. Plus généralement, on peut souligner chaque apparition du monde L^2 (Riesz-Fischer, Riesz, Bessel) et chaque apparition du monde holomorphe (formule de la moyenne, Weierstrass, formule de Cauchy). On observe vraiment une utilisation intensive de chacun des deux domaines, et il faut absolument savoir lequel est utilisé à quel moment pour que le développement tienne la route aux yeux du jury.

— Le théorème de Weierstrass énonce que si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, alors l'espace $\mathcal{H}(U)$ avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est métrisable, et cette métrique le rend complet. On utilise cette complétude dans le développement, donc mieux vaut avoir une idée de ce théorème.

— La question risque d'arriver : le a en indice de $\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ signifie *analytique*, c'est-à-dire que l'on ne garde de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{D})$ que les fonctions qui sont analytiques.

— On peut de même analyse les espaces de Bergman sur d'autres domaines que $\mathbf{D}$, les résultats sont sensiblement les mêmes.

— Au sujet du noyau reproduisant : c'est le noyau d'un opérateur à noyau, et un théorème d'analyse fonctionnelle dit que les opérateurs à noyau de L^2 dans lui-même sont compacts (et quand ils sont hermitiens comme K, ils sont diagonalisables). Attention à ne pas tomber dans ce piège et dire que ça s'applique : le noyau K n'est pas de carré intégrable, le théorème ne s'applique donc pas. Heureusement, parce que l'opérateur que l'on obtient est l'identité, qui ne risque pas d'être un opérateur compact en dimension infinie.

— Les espaces de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS) comme $\mathrm{L}^2_a(\mathbf{D})$ ont été développés par Bergman et Aronszajn au milieu du vingtième siècle. Ils sont utilisés en statistiques, en analyse complexe, en mécanique quantique et en machine learning.

Recasages.

— 201 : On introduit un espace de fonctions et on utilise les propriétés de deux autres espaces, l'un qui est incontournable dans la leçon, qui est un espace de Hilbert séparable (L^2) et l'autre qui est un peu plus original mais tout aussi intéressant, complètement métrisable ($\mathcal{H}$). L'intersection des deux donne lieu à une explosion de propriétés qui proviennent de la magie de chacun des deux premiers espaces. Dans cette leçon, on peut par exemple passer rapidement sur la fin pour se concentrer sur le début du développement.
— 205 : Les deux espaces que l'on intersecte sont complets, et l'on utilise leur complétude pour montrer celle de L^2_a. On utilise ensuite la théorie des espaces de Hilbert (donc la complétude, de manière un peu plus cachée) pour le noyau reproduisant. On peut donc passer un peu vite sur la base hilbertienne.
— 208 : L'espace L^2_a est de Hilbert (donc en particulier normé), et l'on utilise des applications linéaires continues dans le dernier point du théorème. C'est pertinent dans cette leçon surtout si l'on fait une partie sur les espaces de Hilbert ou les espaces préhilbertiens. On peut encore une fois passer rapidement sur le deuxième point.
— 213 : C'est en plein dans le thème de la leçon et on utilise tout plein de théorèmes à propos des espaces de Hilbert (Riesz-Fischer L^2, le critère de densité, l'égalité de Bessel, ...) donc c'est parfait pour montrer que l'on a tout compris. La difficulté ici est que tout le développement est très pertinent, donc c'est difficile d'éclipser certaines parties. On peut par exemple essayer de tout faire rentrer en passant plus rapidement sur les calculs et en insistant sur les gros théorèmes hilbertiens que l'on utilise.
— 234 : C'est très bien juste après le théorème de Riesz-Fischer par exemple. On introduit un espace de fonctions de carré intégrable, donc c'est pertinent dans l'énoncé. Attention la démonstration n'utilise pas beaucoup de théorie de l'intégrabilité, surtout vers la fin. Il faut donc bien insister sur le lemme et sur la première partie du développement.
— 243 : C'est un bon développement pour illustrer les propriétés d'analyticité des fonctions holomorphes. Par exemple la formule intégrale de Cauchy joue un rôle assez crucial. Et tout à la fin on calcule l'expression explicite d'une somme de série entière, donc c'est pertinent. On pourra passer un peu plus rapidement sur les deux premiers points.
— 245 : Il est difficile de trouver un développement qui utilise autant de théorèmes d'analyse complexe (formule de la moyenne, théorème de Weierstrass, formule intégrale de Cauchy, analyticité, ...). Le théorème de Montel en est un autre un peu plus original, mais celui-ci est déjà très solide. On pourra passer un peu plus rapidement sur les calculs et sur le premier point pour insister plus fortement sur le lemme et les utilisations des théorèmes d'analyse complexe.