Prérequis. Théorème spectral.

Théorème 0.0.1. *L'exponentielle matricielle* $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, que l'on diagonalise en $S = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ avec P orthogonale. On a alors $\exp(S) = P\mathrm{diag}(\exp(\lambda_i))P^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, donc l'application dans l'énoncé est bien définie. Et bien sûr, elle est continue.

Surjectivité. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. On la diagonalise en $B = P\mathrm{diag}(\mu_i)P^{-1}$ avec $\mu_i > 0$, et alors $A = P\mathrm{diag}(\ln \mu_i)P^{-1}$ vérifie $\exp A = B$.

Injectivité. Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ telles que $\exp A = \exp A'$. On note Q le polynôme interpolateur de Lagrange qui envoie les valeurs propres $\exp \lambda_i$ de $\exp A$ sur les λ_i. Alors A' commute avec $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$. On peut alors diagonaliser A et A' dans une même base pour vérifier que $A = A'$.

Continuité de la réciproque. Soit $(B_p = \exp A_p)$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ qui converge vers $B = \exp A$. On montre donc que $A_p \to A$.

La suite (B_p) est bornée pour $\| - \|_2$. De même pour la suite (B_p^{-1}) qui converge vers B^{-1} par continuité du passage à l'inverse. Pour $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on a en fait :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^\top M)} = \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M).$$

En appliquant ceci aux B_p et à leurs inverses B_p^{-1}, on remarque que les valeurs propres des B_p sont toutes contenues dans un compact $K = [C', C] \subset]0, +\infty[$. Leurs logarithmes qui sont les valeurs propres des A_p sont alors contenues dans le compact $[\ln C', \ln C]$ de $\mathbf{R}$. Ainsi, (A_p) est bornée pour $\| - \|_2$.

Or, si $A_{\varphi(p)} \to A'$ alors en passant à l'exponentielle puis à la limite on a $B = \exp A'$ donc $A' = A$, ce qui montre que A est la seule valeur d'adhérence de la suite (A_p). Ainsi cette suite converge, vers A. $\square$

Remarques.

- Le développement est ennuyeux à mourir. J'avais juste besoin d'un développement pour remplir mes leçons 156 et 158.
- Il faut savoir démontrer qu'une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge. Si elle ne converge pas vers la valeur d'adhérence, alors on peut construire une sous-suite qui reste loin de celle-ci, et qui reste bornée. Mais alors Bolzano et Weierstrass ne sont pas contents.
- L'utilité de ce théorème est assez limitée.
- C'est mieux de savoir démontrer que $\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^\top M)}$ mais ça n'intéresse personne.

Recasages.

— 156 : Évidemment.
— 158 : Pareil.
— 160 : Si on a vraiment besoin d'un développement, parce qu'il y a quand même beaucoup mieux.