Prérequis. Théorème des fonctions implicites, théorème des fonctions composées

Proposition 0.0.1. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $F : U \to \mathbf{R}^{n-r}$ une application de classe C^1 définissant $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$. Si la différentielle de F en tout point de M est surjective alors M est une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ de classe C^1, ce que l'on suppose. Alors l'ensemble des vecteurs tangents à un point $a \in M$:*

$$T_aM = \{\gamma'(0)\colon \gamma : [-1,1] \to M \textit{ de classe } C^1 \textit{ tel que } \gamma(0) = a\}$$

est égal au sous-espace $\operatorname{Ker} \mathrm{d}F(a)$.

Démonstration. On pose $E_1 = \operatorname{Ker} \mathrm{d}F(a)$ et E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbf{R}^n$. On applique alors le théorème des fonctions implicites à F définie sur $E_1 \oplus E_2 = E_1 \times E_2$, pour obtenir que M est localement le graphe d'une fonction u de classe C^1 :

$$x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, F(x_1 + x_2) = 0 \iff x_1 \in V_1, x_2 = u(x_1).$$

On a alors $T_aM = \{h + \mathrm{d}u(a_1)(h) : h \in E_1\}$, mais le théorème des fonctions implicites donne :

$$\mathrm{d}u(a_1) = -\left(\mathrm{d}F(a) \circ \pi_2\right)^{-1} \circ \left(\mathrm{d}F(a) \circ \pi_1\right)$$

avec π_i la projection $\mathbf{R}^n \to E_i$ parallèlement à l'autre E_j. Sauf que $E_1 = \operatorname{Ker} \mathrm{d}F(a)$ donc $\mathrm{d}u(a_1)(h) = 0$ pour tout $h \in E_1$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} \mathrm{d}F(a) = E_1 = T_aM$. □

Théorème 0.0.2. *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f, g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbf{R}$ des fonctions de classe C^1 et :*

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

Si $f|_\Gamma$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si les $\mathrm{d}g_i(a)$ sont linéairement indépendants, alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}g_i(a).$$

Démonstration. Comme les g_i sont de classe C^1 et les $\mathrm{d}g_i$ libres, la différentielle de $(g_1, \ldots, g_r)$ est surjective, et donc Γ est une sous-variété C^1 de $\mathbf{R}^n$. Soient $v \in T_a\Gamma$, et ainsi $\gamma : [-1,1] \to \Gamma$ valant a en 0 avec $\gamma'(0) = v$. Il suffit de dériver $f \circ \gamma$ en 0 grâce au théorème des fonctions composées :

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

Comme $f|_\Gamma$ admet un extremum local en a, cette dérivée doit s'annuler donc $\mathrm{d}f(a)(v) = 0$. C'est valable pour tout v, donc $\mathrm{d}f(a)$ est nulle sur $T_a\Gamma$. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant à $T_a\Gamma = \bigcap_{i=1}^r \operatorname{Ker} \mathrm{d}g_i(a)$.

Lemme 0.0.3. *Soient $\phi, \psi_1, \ldots, \psi_r$ des formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie. Alors ϕ est combinaison linéaires des ψ_i si et seulement si :*

$$\operatorname{Ker} \phi \supset \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \psi_i.$$

Démonstration. Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, il suffit de passer à l'orthogonal (dans le dual) :

$$(\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp \subset \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Ker}\,\psi_i)^\perp$$

et remarquer que $(\mathrm{Ker}\,\phi)^\perp$ est la droite engendrée par ϕ. □

□

Corollaire 0.0.4. *Pour tous $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}^n$, on a :*

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2.$$

Démonstration. On maximise le déterminant sur le tore :

$$\mathbf{S} = \{(v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbf{R}^n)^2 \mid \|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1\}.$$

Le théorème des extrema liés montre que si det atteint son maximum en un $(v_1, \ldots, v_n)$ alors c'est une base orthonormée donc de déterminant ± 1. Le résultat est obtenu par homogénéité. □

Remarques.

- Il faut faire attention car cette version est d'un assez haut niveau. On utilise le théorème des fonctions implicites pour montrer qu'une sous-variété définie localement avec une équation peut être définie localement avec un graphe. Ce théorème nous donne aussi le fait que l'espace tangent en un point est le noyau de la différentielle de l'équation en ce point, ce que l'on utilise dans la démonstration du théorème des extrema liés.
- Justement à ce propos, le jury déteste quand le contenu d'un développement est caché dans un lemme : ça repousse les mathématiques à ailleurs et le développement devient vide de raisonnement. Il faut donc absolument expliquer la proposition, même si les détails peuvent être un peu gommés. Se contenter du théorème et du lemme ne suffit pas, puisque tout réside dans l'égalité $T_a\Gamma = \bigcap \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}g_i(a)$.
- C'est quand même probablement beaucoup mieux à l'oral de commencer par démontrer le théorème des extrema liés, puis de démontrer la proposition à la fin. Ainsi plus on prend du temps au début, plus on pourra gommer les détails de la proposition pour s'assurer que le développement soit clair, sans perdre en rigueur.
- Après ce développement, mieux vaut maîtriser les exercices simples qui peuvent suivre. Notamment l'utilisation du théorème des fonctions implicites, l'utilisation des extrema liés dans un cas simple ou énoncer d'autres applications. Une jolie application est la majoration $V^{2/3} \leqslant S/6$ où V et S sont respectivement le volume et l'aire d'un parallélépipède rectangle dans $\mathbf{R}^3$, avec égalité quand c'est un cube.

Recasages.

- 159 : Le lemme est un résultat facile de dualité en dimension finie, qui pourtant donne un résultat d'analyse très fort. Attention, le développement n'est pas très original dans cette leçon j'ai l'impression.
- 206 : On n'*utilise* pas la dimension finie à proprement parler, mais comme tout se déroule en dimension finie ça peut passer. Mais je trouve ça un peu limite.
- 214 : C'est une très bonne application du théorème des fonctions implicites, qui complète la suite logique inversion locale $\to$ fonctions implicites $\to$ extrema liés. C'est une bonne idée de démontrer un gros théorème du plan et de ne pas avoir que des développements anecdotiques.
- 215 : On utilise des différentielles partout et le résultat lui-même porte sur des applications de classe C^1, donc c'est en plein dans le thème. En plus dans les applications (comme l'inégalité de Hadamard), on calcule réellement des différentielles (ici celle du déterminant).
- 219 : Le nom du développement coïncide presque avec le titre de la leçon.