Prérequis. Théorème des résidus, théorème de changement de variables, fonction Gamma

Théorème 0.0.1. *Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \mathfrak{Re}(z) < 1$, on a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. Comme les deux membres de l'égalité sont holomorphes, il suffit de le démontrer pour $s \in]0,1[$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x \int_0^{+\infty} y^{-s}\mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{-s}\mathrm{e}^{-(x+y)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{uv}{v+1}\right)^{s-1}\left(\frac{u}{v+1}\right)^{-s}\mathrm{e}^{-u}\frac{u}{(v+1)^2}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}\mathrm{e}^{-u}}{v+1}\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}}{v+1}\ \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}}{v+1}\ \mathrm{d}v \\
&= \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{ts}}{1+\mathrm{e}^t}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

le premier changement de variable étant donné par $(u,v) = (x+y, x/y)$, le second par $t = \ln v$. Reste simplement à évaluer cette dernière intégrale, avec le théorème des résidus.

Posons donc $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{zs}}{1+\mathrm{e}^z}$ qui est méromorphe sur $\mathbf{C}$, ses pôles étant en $(2k+1)\mathrm{i}\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$. On applique le théorème des résidus à f avec le lacet γ décrivant un rectangle autour du pôle $\mathrm{i}\pi$:

- γ_1 décrit le segment $[-R, R]$;
- γ_2 décrit le segment $[R, R+2\mathrm{i}\pi]$;
- γ_3 décrit le segment $[R+2\mathrm{i}\pi, -R+2\mathrm{i}\pi]$;
- γ_4 décrit le segment $[-R+2\mathrm{i}\pi, -R]$.

Par théorème des résidus on a :

$$\int_\gamma f = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_f(\mathrm{i}\pi) = 2\mathrm{i}\pi \lim_{z\to\mathrm{i}\pi}(z-\mathrm{i}\pi)\frac{\mathrm{e}^{zs}}{1+\mathrm{e}^z} = 2\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}} = -2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}.$$

D'autre part, sur γ_2 on a :

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{sR}\mathrm{e}^{sit}}{1+\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\pi\mathrm{e}^{sR}}{e^R-1} \to 0,$$

sur γ_4 on a de même :

$$\left|\int_{\gamma_4} f\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-sR}\mathrm{e}^{sit}}{1+\mathrm{e}^{-R+it}}\mathrm{i}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\pi\mathrm{e}^{-sR}}{1-\mathrm{e}^{-R}} \to 0.$$

Sur γ_3 on a :

$$\int_{\gamma_3} f = -\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ts}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi s}}{1+\mathrm{e}^{t+2\mathrm{i}\pi}}\ \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi s}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ts}}{1+\mathrm{e}^{t}}\ \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi s}\int_{-R}^{R} f$$

d'où finalement :

$$-2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s} = \int_{\gamma} f = (1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi s})\int_{-R}^{R} f \to \int_{\mathbf{R}} f$$

ce qui se réécrit :

$$\int_{\mathbf{R}} f = \frac{2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi s}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi s}-1} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

□

Corollaire 0.0.2. *On obtient le calcul de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Démonstration. Il suffit d'évaluer la formule des compléments en $z = 1/2$, et voir avec un changement de variables que $\Gamma(1/2)$ est égal à l'intégrale de Gauss. □

Remarques.

— Le développement est très calculatoire et assez peu original. Mais s'il est bien maîtrisé, il est très bien car il montre une aisance avec le calcul d'intégrales, les changements de variables et le théorème des résidus.

— La formule des compléments sert principalement à deux choses. La première est le corollaire $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, mais la formule ne joue pas un rôle très important puisque l'on peut obtenir cette égalité d'autres manières. L'application principale de cette formule est de pouvoir prolonger Γ à tout le plan complexe privé des pôles (les entiers négatifs), là où on n'avait avant que le demi-plan $\{\mathfrak{Re}(z) > 0\}$. Comme la fonction ζ de Riemann est solution d'une équation fonctionnelle faisant apparaître Γ, on peut ainsi prolonger analytiquement la fonction ζ aux complexes de partie réelle négative.

— Il est important de bien maîtriser le changement de variable en deux dimensions qui est fait au début. En particulier, savoir expliquer pourquoi c'est un C^1-difféomorphisme (par inversion globale), et savoir calculer le jacobien. Le plus dur est probablement d'arriver à exprimer x et y en fonction de u et v.

— Il faut absolument faire un dessin du chemin γ et y faire figurer les pôles de f. On explique à l'oral que l'on va faire tendre R vers $+\infty$ comme d'habitude, pour motiver le calcul.

Recasages.

- 235 : On utilise deux fois le théorème de Fubini-Tonelli, qui n'est assurément pas la meilleure manière d'illustrer la leçon, mais qui est quand même dans le thème.
- 236 : C'est un très bon développement si l'on insiste un peu sur le corollaire, puisque c'est une manière assez originale de calculer l'intégrale de Gauss. En plus, on illustre le théorème des résidus qui est central dans la leçon.
- 239 : L'étude de la fonction Γ est presque incontournable, et l'on commence par montrer que $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ est une intégrale à paramètre. Attention le développement n'utilise aucun théorème de régularité des intégrales à paramètre (à part si l'on n'a pas déjà expliqué que Γ est méromorphe), donc il faut vraiment insister sur le fait que l'on étudie Γ.
- 245 : On illustre bien le théorème des résidus dans un cas assez concret et loin d'être dénué de sens. Surtout que pour une fois, il y a un vrai résidu à calculer, ce qui est assez rare dans les calculs simples. On utilise aussi de manière cruciale le théorème des zéros isolés, pour simplifier le problème. C'est donc un beau résumé de la leçon.
- 265 : C'est surtout si l'on fait une partie sur l'étude de la fonction Γ. C'est très souvent le cas, et ce développement apparaît très souvent dans cette leçon, donc rien de très marquant.
- 267 : Une application du théorème des résidus dans cette leçon est toujours la bienvenue, attention de ne pas trop en mettre non plus.