Prérequis. Théorème de Weierstrass

Théorème 0.0.1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de nombres réels en* $O(1/n)$*. Si* $\sum a_n z^n$ *a un rayon* $\geqslant 1$ *et si sa somme* F *est de limite nulle en* 1^-*, alors* $\sum a_n$ *converge et sa somme est nulle.*

Démonstration. On note :

$$\Phi = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbf{R} \mid \forall x \in [0,1[, \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge, et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0 \right\}.$$

On veut montrer que l'indicatrice de $[1/2, 1]$ est dans Φ. Pour cela, on commence par les fonctions polynomiales, et l'on appliquera le théorème de Weierstrass.

Il est clair que Φ contient toutes les fonctions polynomiales qui s'annulent en 0. Maintenant si q est une fonction polynomiale, on montre que :

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q.$$

La somme à gauche converge toujours absolument puisque q est bornée. Supposons que q soit monomiale, disons $q(x) = x^k$. Alors pout tout $x \in [0, 1[$:

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(x^n) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{1}{1 + x + \cdots + x^k},$$

d'où le résultat en passant à la limite. Par linéarité, c'est donc vrai pour toutes les fonctions polynomiales.

On pose alors $g = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$, dont on veut montrer qu'elle appartient à Φ. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$ et l'on trouve deux polynômes p_1 et p_2 tels que :

1. $p_1(0) = p_2(0) = 0$ et $p_1(1) = p_2(1) = 1$;
2. $p_1 \leqslant g \leqslant p_2$ sur $[0, 1]$;
3. $\int_0^1 q < \varepsilon$ avec $q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)}$.

Pour les trouver, posons $h(x) = \frac{g(x) - x}{x(1-x)}$. Pour contrôler la discontinuité, on introduit s_1 et s_2 deux fonctions continues telles que $s_1 \leqslant h \leqslant s_2$, et $\int_0^1 (s_2 - s_1) < \varepsilon$. D'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver t_1 et t_2 deux fonctions polynomiales telles que $|s_i - t_i| < \varepsilon$ sur $[0, 1]$. On note alors $u_1 = t_1 - \varepsilon$ et $u_2 = t_2 + \varepsilon$ pour avoir :

$$u_1 < s_1 \leqslant h \leqslant s_2 < u_2, \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = t_2 - t_1 + 2\varepsilon \leqslant s_2 - s_1 + 4\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 (u_2 - u_1) \leqslant \int_0^1 (s_2 - s_1 + 4\varepsilon) < 5\varepsilon.$$

Comme on vient d'approcher h vérifiant $g(x) = x + x(1-x)h(x)$ pour $x \in [0, 1]$, on peut approcher g en posant :

$$p_i = x + x(1-x)u_i(x).$$

Reste à voir en quoi ces deux polynômes nous permettent de conclure que $g \in \Phi$. Pour $x \in [0,1[$ il est clair que $\sum a_n g(x^n)$ converge puisque la somme est finie, il faut donc démontrer l'autre point. Comme $a_n = O(1/n)$, on peut poser $M > 0$ tel que $|a_n| \leqslant M/n$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour $x \in [0,1[$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|(p_2 - p_1)(x^n) \\ &\leqslant M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x)^n}{n} q(x^n) \\ &\leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n).\end{aligned}$$

Ce dernier membre tend vers $M\int_0^1 q < M\varepsilon$ donc est plus petit que $M\varepsilon$ lorsque x est assez proche de 1^-, et la somme $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\right|$ est plus petite que ε pour $x > \lambda$ car $p_1 \in \Phi$. Finalement pour $x > \lambda$:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\right| \leqslant \varepsilon + M\varepsilon.$$

On fait finalement tendre ε vers 0 pour obtenir $g \in \Phi$.

Et maintenant le théorème est démontré, puisque :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{\lfloor -\ln 2/\ln x \rfloor} a_n$$

pour tout $x \in [0,1[$. □

Remarques.

- Le théorème est assez technique à démontrer et difficile à retenir, mais il est assez visuel pour que ce ne soit pas insurmontable.
- Il faut absolument faire des dessins quand on énonce que l'on va définir p_1 et p_2, et faire un dessin pour la construction de h, s_i, t_i et u_i. Et il faut faire ce dessin en prenant de la place.
- Il faut bien annoncer les idées de la démonstration au début, et pendant : elle est technique et on peut vite se perdre dans le raisonnement, alors c'est utile à la fois pour se rappeler du développement et pour que le jury comprenne.
- Si le développement est trop difficile, on peut se contenter du théorème taubérien faible.
- Ce théorème est en général plutôt appelé *théorème taubérien de Littlewood* car c'est lui qui l'a démontré (puis c'est Karamata qui a trouvé la démonstration du développement). Le *théorème taubérien de Hardy-Littlewood* est un peu plus général, et énonce que si a_n est une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-ny} \sim$

$1/y$ lorsque $y \to 0+$, alors les sommes partielles des a_k sont équivalentes à n. Une application de ce théorème est le théorème des nombres premiers. On commence par établir que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Lambda(n)\mathrm{e}^{-ny} \sim \frac{1}{y},$$

puis l'on en déduit avec le théorème que $\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \sim x$. Ainsi si le jury demande à quoi peut servir ce théorème, on peut expliquer que c'est le précurseur du théorème plus général, ou bien donner un exemple un peu plus bête, comme le calcul de la somme harmonique alternée qui vaut $-\ln 2$.

Recasages.

— 209 : C'est une très jolie et surprenante application du théorème de Weierstrass, et ce n'est pas la seule approximation que l'on fait dans le développement. On commence par approximer avec des fonctions continues, puis avec des fonctions polynomiales, donc on illustre un théorème de densité des fonctions continues.

— 230 : La leçon ne porte pas sur les séries entières donc il faut bien expliquer que le développement peut servir à calculer des sommes infinies. Par exemple la série harmonique alternée peut s'étudier avec ce théorème.

— 235 : Le théorème est justement un théorème d'interversion limite-somme, qui ne découle pas déjà des théorèmes d'interversion connus. On peut alors citer d'autres théorèmes taubériens et des théorèmes abéliens pour accompagner une partie d'approfondissement.

— 241 : Cette fois c'est les séries entières qui sont dans le thème, et on illustre en particulier leur utilité dans le calcul de sommes infinies. On fait aussi apparaître la série entière géométrique qui est probablement la plus utile de toutes.

— 243 : cf. 241.