

**Prérequis.** Théorie des représentations et des caractères, lemme de Schur, diagonalisation des matrices hermitiennes.

**Théorème 0.0.1.** Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation linéaire irréductible d'un groupe fini  $G$  sur  $\mathbf{C}$ , de caractère  $\chi$ . Pour que  $\chi$  soit à valeurs réelles (resp. pour que  $\rho$  se réalise sur  $\mathbf{R}$ ), il faut et il suffit qu'il existe une forme bilinéaire (resp. forme bilinéaire symétrique) non dégénérée sur  $V$ , invariante par  $G$ . De plus,  $\rho$  se réalise sur  $\mathbf{R}$  si et seulement si l'indicateur de Frobenius-Schur vaut 1 :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1.$$

*Démonstration.* On rappelle qu'avec la représentation  $\rho$  vient automatiquement la représentation duale  $V^*$ , et que son caractère  $\chi^*$  est donné par :

$$\chi^*(g) = \chi(g)^* = \chi(g^{-1}).$$

Ainsi,  $\chi$  est à valeurs réelles si et seulement si  $\chi = \chi^*$ , si et seulement si  $V$  et  $V^*$  sont des représentations isomorphes. Mais  $\text{Hom}(V, V^*) \cong \text{Hom}(V \otimes V, \mathbf{C})$ , et l'existence d'un isomorphisme est donc équivalente à l'existence d'une forme bilinéaire  $G$ -invariante non nulle sur  $V$ , laquelle est alors nécessairement non dégénérée.

Supposons maintenant que  $\rho$  est réalisable sur  $\mathbf{R}$ . Cela veut dire que l'on peut trouver une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  dans laquelle la matrice de chaque  $\rho(g)$  est à coefficients réels. On pose alors  $V_0 = \bigoplus_i \mathbf{R}e_i$  de sorte que  $V = V_0 \oplus iV_0$ . On choisit par exemple  $\beta$  le produit scalaire qui rend la base  $(e_i)$  orthonormée, et l'on pose comme d'habitude :

$$\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \beta$$

qui définit maintenant une forme bilinéaire symétrique  $G$ -invariante sur  $V_0$ . On l'étend à tout  $V = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$  par extension des scalaires, définissant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et  $G$ -invariante sur  $V$ .

Réciproquement, supposons que  $B$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et  $G$ -invariante sur  $V$ . En moyennant comme ci-dessus, on peut fabriquer un produit hermitien invariant par  $G$  que l'on note  $\langle -, - \rangle$ . Par théorème de Riesz, il existe une unique application  $\phi : V \rightarrow V$  anti-linéaire et bijective telle que pour  $x, y \in V$  :

$$B(x, y) = \langle \phi(x), y \rangle^*.$$

Pour  $x, y \in V$  on a alors :

$$\langle \phi^2(x), y \rangle = B(\phi(x), y)^* = B(y, \phi(x))^* = \langle \phi(y), \phi(x) \rangle$$

et de manière symétrique,  $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \phi^2(y), x \rangle$  ce qui montre que  $\langle \phi^2(x), y \rangle = \langle x, \phi^2(y) \rangle$ . Ainsi  $\phi^2$  est un automorphisme hermitien de  $V$  et comme  $\langle \phi^2(x), x \rangle = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle$ , il est positif.

On peut alors lui trouver une racine carrée  $v$  qui est un polynôme à coefficients réels en  $\phi$  (diagonaliser  $\phi^2$  et prendre le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les valeurs propres en envoyant  $\lambda_i$  sur  $\sqrt{\lambda_i}$ ). On pose alors  $\sigma = \phi v^{-1}$ . Comme  $v$  est un polynôme en  $\phi$  ils commutent, donc  $\sigma^2$  est l'identité. On décompose alors  $V = V_+ \oplus V_-$  selon les valeurs propres  $+1$  et  $-1$  de  $\sigma$ .

Comme  $\sigma$  est anti-linéaire, la multiplication par  $i$  envoie  $V_+$  sur  $V_-$ , donc  $V = V_+ \oplus iV_+$ . Comme  $B(-, -)$  et  $\langle -, - \rangle$  sont  $G$ -invariants, les applications  $\phi$ ,  $v$  et  $\sigma$  commutent avec les  $\rho(g)$ , donc  $V_+$  et  $V_-$  sont  $G$ -stables. Cela donne une réalisation de  $\rho$  sur  $\mathbf{R}$ .

Montrons la dernière équivalence. L'homomorphisme défini par  $\theta(x \otimes y) = y \otimes x$  est un automorphisme de la représentation  $V \otimes V$ , de carré l'identité. Ainsi il décompose cette représentation en :

$$V \otimes V = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Alt}^2(V),$$

les facteurs étant respectivement le *carré symétrique* et le *carré alterné* de  $V$ . Le caractère  $\chi_\sigma$  de  $\text{Sym}^2(V)$  (resp. le caractère  $\chi_\alpha$  de  $\text{Alt}^2(V)$ ) est donné par :

$$\begin{aligned}\chi_\sigma(g) &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 + \chi(g^2)) \\ \chi_\alpha(g) &= \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2))\end{aligned}$$

et l'on vérifie bien que  $\chi_\sigma + \chi_\alpha = \chi$ . Le nombre  $a_\sigma$  (resp.  $a_\alpha$ ) de fois que le carré symétrique (resp. alterné) de  $\rho$  contient la représentation triviale est alors :

$$a_\sigma = \langle 1, \chi_\sigma \rangle \quad a_\alpha = \langle 1, \chi_\alpha \rangle.$$

Mais le dual de  $\text{Sym}^2(V)$  est (comme déjà utilisé plus haut) l'espace des formes bilinéaires symétriques sur  $V$ , donc il existe une forme bilinéaire symétrique  $G$ -invariante si et seulement si  $\text{Sym}^2(V)^*$  n'est pas triviale, si et seulement si  $a_\sigma = 1$  et  $a_\alpha = 0$ , ce qui donne le résultat puisque l'indicateur de Frobenius-Schur vaut  $a_\sigma - a_\alpha$ .  $\square$

### Remarques.

- Tout faire risque d'être un peu lourd. Le mieux est de caser la définition du carré symétrique et du carré alterné plus tôt dans le plan, et d'utiliser le calcul de leurs caractères sans réfléchir. Pour que ça rentre en quinze minutes, il faut probablement passer sur des détails (comme la technique de moyenner pour obtenir des objets  $G$ -invariants).
- Il faut être au clair sur le lemme de Schur : si  $V$  et  $V'$  sont deux représentations irréductibles alors  $\text{Hom}(V, V')$  est soit isomorphe à  $\mathbf{C}$  soit nul, selon que  $V$  et  $V'$  sont des représentations isomorphes ou non. On utilise ce lemme à plusieurs reprises.
- Le calcul des caractères  $\chi_\sigma$  et  $\chi_\alpha$  se fait comme suit. Soit  $g \in G$ . On peut alors choisir une base  $(e_i)$  de  $V$  qui diagonalise  $\rho(g)$ , avec les valeurs propres  $(\lambda_i)$ . On a alors  $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$  et  $\chi(g^2) = \sum_i \lambda_i^2$ . D'autre part :

$$(\rho(g) \otimes \rho(g))(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i) = \lambda_i \lambda_j (e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$$

d'où :

$$\chi_\sigma(g) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left( \left( \sum_i \lambda_i \right)^2 + \sum_i \lambda_i^2 \right)$$

et de même pour  $\chi_\alpha$  en remplaçant les  $+$  par des  $-$  aux bons endroits.

**Recasages.**

- 101 : Si l'on fait une partie sur les représentations, sinon c'est complètement hors sujet. Mais c'est un développement de très haut niveau, alors si l'on veut parler de représentations dans cette leçon, ça place la barre très haut directement.
- 154 : La question des sous-espaces stables en théorie des représentations est vraiment centrale, et ici la réalisation d'une représentation complexe sur  $\mathbf{R}$  en est un cas. On regarde quand est-ce qu'il existe un sous- $R$ -espace vectoriel de  $V$  qui est stable par les  $\rho(g)$ , donc ça rentre bien dans la leçon. Attention à bien gérer la théorie des représentations dans cette leçon, elle ne doit pas y être omniprésente je pense.
- 158 : On utilise la diagonalisation des matrices hermitiennes, et l'existence d'une racine carrée quand la matrice est positive (qui est facile, et on n'est pas obligé de l'expliquer à l'oral).
- 159 : On utilise à fond la dualité, qui est vraiment pratique dans la théorie des représentations, parce que ça fait apparaître des Hom et donc des conditions très fortes. Et puis le développement parle énormément de formes bilinéaires, ce qui revient au même.
- 170 : Ça commence à être limite mais c'est justifiable. Il faut un peu insister sur le fait que la forme bilinéaire symétrique est alors la forme polaire d'une forme quadratique, et que le fait qu'elle soit  $G$ -invariante revient à dire que la représentation se réalise dans le groupe orthogonal de cette forme quadratique.