Prérequis. Théorème de Stokes, Séries de Fourier, théorème de Jordan.

Théorème 0.0.1. *Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un lacet simple continu et C^1 par morceaux de longueur L, entourant une surface d'aire S. Alors :*

$$S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}.$$

Les cas d'égalité se font exactement lorsque γ décrit un cercle.

Démonstration. Par homogénéité, on peut supposer que $L = 1$. Aussi, l'inégalité à démontrer ne dépend pas de la manière dont on a paramétrisé γ, donc on peut très bien le reparamétriser de sorte à avoir $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout t, et à ce qu'il soit orienté positivement.

On développe γ en série de Fourier avec $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ pour coefficients : la dérivée γ' a pour coefficients de Fourier $(c'_n = 2\mathrm{i}\pi n c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. D'une part, on peut calculer la longueur de l'arc avec Parseval :

$$L = \int_0^1 |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2$$

et d'autre part, la formule de Stokes donne, en écrivant $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^1 (xy' - x'y) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\int_0^1 \gamma'\overline{\gamma} = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n\overline{c_n} \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\mathrm{i}\pi n|c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pi n|c_n|^2. \end{aligned}$$

Ainsi comme $L = L^2$ on obtient $L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n^2 - n)|c_n|^2 \geqslant 0$. Le cas d'égalité se produit exactement lorsque $c_n = 0$ pour $n \notin \{0,1\}$, ce qui correspond au cas où γ décrit un cercle. □

Remarques.

- Le développement en l'état est très court, mais le principe est de remplir le temps restant avec des explications de tout ce que l'on a laissé de côté. En particulier :
  - La reparamétrisation par longueur d'arc pour avoir $|\gamma'| = 1$ est possible parce que la longueur du début de l'arc $t \mapsto \int_0^t |\gamma'|$ est un C^1-diffféomorphisme. La longueur de l'arc ne change pas après reparamétrisation par théorème de changement de variables.
  - On n'utilise pas vraiment le fait que γ est égal partout à la somme de sa série de Fourier (ce qui est vrai car γ est continu et C^1 par morceaux), mais l'on utilise les hypothèses de régularité pour dire que $c'_n = 2\mathrm{i}\pi n c_n$.
  - Le théorème de Stokes utilisé ici est aussi appelé *formule de Green-Riemann.* Si l'on veut détailler dans la généralité, on peut expliquer que l'on applique

le théorème de Stokes à la 1-forme différentielle $\omega = \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$. La différentielle extérieure vaut $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, et le théorème de Stokes appliqué au compact entouré par γ (il est compact par le théorème de Jordan, et son bord est C^1 par morceaux ; il faudrait C^1 mais on peut toujours dire qu'au pire on découpe) donne la formule écrite ci-dessus. Le théorème de Stokes se démontre en introduisant une partition de l'unité adaptée à un atlas choisi, pour se ramener via les cartes au cas plat, qui se fait avec le théorème de Fubini et des intégrations par parties.

  — Justement, le théorème de Jordan doit être connu, car il permet à l'énoncé d'avoir un sens. Il énonce que si γ est un lacet simple continu découpe le plan en deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non. Si l'on garde γ de classe C^1 par morceaux, alors on peut utiliser l'indice d'un lacet utilisé en analyse complexe. Si l'on suppose seulement γ continu, alors les démonstrations sont techniques, une pas trop compliquée utilise le théorème de point fixe de Brouwer.
  — Les seuls coefficients de Fourier non nuls de γ sont c_0 et c_1 si et seulement si γ décrit un cercle. En effet, si c'est le cas alors comme γ est égal à la somme de sa série de Fourier (il est continu et C^1 par morceaux) il est de la forme $c_0 + c_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$ qui est clairement un cercle. Réciproquement, si γ décrit un cercle alors comme on a supposé qu'il était orienté positivement et que c'était un lacet simple, il est de la forme $c_0 + c_1 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$ et alors ses coefficients de Fourier sont évidents.

— On peut relaxer l'hypothèse C^1 par morceaux qui est très forte, le théorème est en fait vrai dès que γ est continu (donc dès l'application du théorème de Jordan). La démonstration avec les séries de Fourier et le théorème de Stokes tombe alors en ruine, et il faut faire autrement. Une démonstration assez simple utilise le théorème de Brunn-Minkowski, qui énonce que si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ et si A et B sont deux compacts non vides, alors :

$$\mu(A+B)^{1/n} \geqslant \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}.$$

On le démontre en partant du cas où A et B sont des pavés simples, puis on augmente pas à pas la généralité. Pour obtenir l'inégalité isopérimétrique (et en toutes dimensions !), on applique cette inégalité au compact K dont on veut majorer la mesure, et à une boule de rayon ε. On met alors l'inégalité à la puissance n, on soustrait $\mu(K)$, on divise par ε et on le fait tendre vers 0. À gauche on obtient l'aire de la surface de K, et à droite avec un développement limité on obtient à un facteur près $\mu(K)^{1/n}$.

— Il y a des inégalités plus précises que celle-ci. Par exemple, l'inégalité de Bonnesen énonce que si la surface entourée par γ est convexe et si r (resp. R) est le rayon du cercle inscrit (resp. circonscrit), alors $L^2 - 4\pi S$ est plus grand que $\pi^2(R^2 - r^2)$.

Recasages.

— 219 : Même si les techniques utilisées ne sont pas du tout au cœur de la leçon, on cherche quand même à minimiser le périmètre pouvant entourer une surface d'aire donnée (ou maximiser l'aire de la surface entourée par une courbe de longueur donnée). Et l'on obtient une illustration d'une recherche d'extrema d'une fonction définie sur un espace assez sauvage et très différent d'un espace vectoriel normé comme on en a trop l'habitude dans cette leçon.

- 236 : C'est pas forcément idéal, mais on calcule quand même une intégrale (l'aire de la surface entourée) avec le théorème de Stokes. Il faudrait alors mettre le théorème de Stokes dans le plan...
- 246 : C'est une belle application de la théorie des séries de Fourier, mais il ne faut pas oublier que la démonstration dans le cas général ne les utilise pas. On fait quand même apparaître plusieurs fois l'égalité de Parseval et l'on visualise bien le lien avec les cercles, donc c'est très pertinent.
- 267 : Les problèmes isopérimétriques sont explicitement dans le rapport de jury sur cette leçon, donc c'est très bien. Attention quand même dans la défense, parce que le titre de la leçon comporte le mot *utilisations*.