Prérequis. Théorème d'inversion locale, théorème des accroissements finis

Théorème 0.0.1. *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $\mathrm{d}f(x)$ est une isométrie pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. Alors f est une isométrie affine.*

Démonstration. Par hypothèse on a $\|\mathrm{d}f(x)\| = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, ainsi l'inégalité des accroissements finis montre que f est 1-lipschitzienne.

Soit $a \in \mathbf{R}^n$. Comme $\mathrm{d}f(a)$ est inversible, l'inversion locale donne un voisinage $V_a \ni a$ tel que $f|_{V_a}$ soit un C^1-difféomorphisme $V_a \to W_a = f(V_a)$. Pour tout $y = f(x) \in W_a$, le théorème des fonctions composées montre que $\mathrm{d}(f^{-1})(y) = \mathrm{d}f(x)^{-1}$ est une isométrie, donc $\|\mathrm{d}(f^{-1})(y)\| = 1$. On peut alors appliquer le même raisonnement qu'au début : l'inégalité des accroissements finis montre que f^{-1} est 1-lipschitzienne sur W_a (il faut que W_a soit convexe mais on peut le supposer quitte à réduire V_a). Finalement, pour tous $x, x' \in V_a$:

$$\|x - x'\| = \|f^{-1}f(x) - f^{-1}f(x')\| \leqslant \|f(x) - f(x')\|$$

d'où $\|f(x) - f(x')\| = \|x - x'\|$.

Cette égalité s'écrit :

$$\langle f(x) - f(x'), f(x) - f(x') \rangle = \langle x - x', x - x' \rangle$$

qui se différentie par rapport à x :

$$2\langle \mathrm{d}f(x)(h), f(x) - f(x') \rangle = 2\langle h, x - x' \rangle$$

puis par rapport à x' :

$$-\langle \mathrm{d}f(x)(h), \mathrm{d}f(x')(k) \rangle = -\langle h, k \rangle$$

Ce qui permet finalement de montrer que :

$$\|\mathrm{d}f(x)(h) - \mathrm{d}f(x')(h)\|^2 = \|\mathrm{d}f(x)(h)\|^2 - 2\langle \mathrm{d}f(x)(h), \mathrm{d}f(x')(h) \rangle + \|\mathrm{d}f(x')(h)\|^2 = 0$$

Maintenant que l'on sait que $\mathrm{d}f$ est constante sur V_a pour tout a, on peut conclure, comme dans tous les résultats de propagation de propriétés sur des espaces connexes. L'ensemble $\Gamma = \{a \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}f(0)\}$ est ouvert d'après ce qui précède, mais c'est aussi un fermé puisque f est de classe C^1. Donc $\mathrm{d}f$ est constante sur $\mathbf{R}^n$, et $f - \mathrm{d}f(0)$ est de différentielle nulle donc constante : f est une isométrie affine. $\square$

Remarques.

— Le développement est très court, il faut donc bien prendre son temps et faire des dessins. On peut par exemple illustrer l'inversion locale, les accroissements finis, le fait que $\langle \mathrm{d}f(x)(h), \mathrm{d}f(x')(k) \rangle = \langle h, k \rangle$, le fait que $\mathrm{d}f$ soit localement constante et pourquoi on peut en déduire qu'elle est constante, ... De même on peut expliciter le théorème des accroissements finis.

- C'est un théorème de passage local-global, qui se fait par connexité comme beaucoup d'autres en analyse. On peut faire un commentaire sur ce point, et ainsi motiver la démonstration. Ce n'est pas un développement long ni difficile, donc c'est mieux si on l'accompagne d'une preuve de recul sur les notions utilisées.
- Tout à la fin on utilise le fait que f est C^1 pour conclure que $\mathrm{d}f$ est constante, mais c'est trop fort. La fonction $\mathrm{d}f$ est localement constante, donc elle est constante puisque $\mathbf{R}^n$ est connexe. On utilise la continuité de $\mathrm{d}f$ pour dire que Γ est fermé, mais on peut faire plus simple puisque les $(\mathrm{d}f)^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbf{R}^n$ sont des ouverts disjoints de $\mathbf{R}^n$ qui le recouvrent.

Recasages.

- 204 : C'est une démonstration par connexité comme il en existe beaucoup d'autres. Elle est assez originale pour l'agrégation, mais pas très difficile.
- 214 : C'est une application directe du théorème d'inversion locale. On peut aussi citer le théorème d'inversion globale, le théorème de Hadamard-Lévy, et plein d'autres. Celui-ci a l'avantage d'être assez simple et d'être un résultat intéressant en lui-même.
- 215 : On illustre une propriété de rigidité sur les fonctions différentiables, et le résultat fait joli dans un plan.