Prérequis. Aucun.

Théorème 0.0.1. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et A une matrice carrée de taille n à coefficients dans k. On note χ son polynôme caractéristique et $P = \chi/\operatorname{pgcd}(\chi, \chi')$ la version sans facteur carré de χ. Alors la suite (A_r) définie par :*

$$A_0 = A \text{ et } A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$$

est bien définie et elle stationne dès $r = \lceil \log_2(n) \rceil$. La limite $A_\infty = D$ est la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford $A = D + N$.

Démonstration. On montre par récurrence sur r les trois points suivants simultanément :

1. $P(A_r)$ est nilpotente d'indice $\nu_r \leqslant 1 + (n-1)2^{-r}$;
2. $P'(A_r)$ est inversible ;
3. A_{r+1} est un polynôme en A.

Initialisation. Les racines de P sont les racines de χ, donc χ divise P^n, et par Cayley-Hamilton, $P(A)^n = 0$. Donc 1. est vrai pour $r = 0$. Ensuite, les valeurs propres de $P'(A)$ sont les $P'(\lambda)$ avec λ valeur propre de A, donc ne sont pas nulles (P est sans facteur carré). Donc 2. est vrai pour $r = 0$. Enfin 3. est vrai parce que $P'(A)^{-1}$ est un polynôme en A (l'inverse d'une matrice est toujours un polynôme en la matrice).

Hérédité. Supposons 1., 2. et 3. pour un certain r. Il existe $Q \in k[X, Y]$ tel que :

$$P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 Q(X, Y).$$

On évalue alors la formule de Taylor ci-dessus en $X = A_r$ et $Y = -P(A_r)P'(A_r)^{-1}$:

$$\begin{aligned} P(A_{r+1}) &= P(A_r) - P(A_r)P'(A_r)^{-1}P'(A_r) + P(A_r)^2 P'(A_r)^{-2} Q(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1}) \\ &= P(A_r)^2 P'(A_r)^{-2} Q(A_r, -P(A_r)P'(A_r)^{-1}). \end{aligned}$$

Comme ces matrices commutent, $P(A_{r+1})$ est bien nilpotente d'indice :

$$\nu_{r+1} \leqslant \frac{\nu_r + 1}{2}$$

d'où 1. au rang $r + 1$.

Comme P est à racines simples il est premier avec P' et Bézout donne $UP + VP' = 1$. En évaluant en A_{r+1} on obtient $V(A_{r+1})P'(A_{r+1}) = I_n - U(A_{r+1})P(A_{r+1})$. Comme toutes ces matrices commutent et comme $U(A_{r+1})P(A_{r+1})$ est nilpotente par 1., la matrice $V(A_{r+1})P'(A_{r+1})$ n'a que 1 comme valeur propre donc $P'(A_{r+1})$ est inversible, d'où 2. au rang $r + 1$.

Reste à montrer 3. au rang $r + 1$, qui est immédiat avec 3. au rang r car l'inverse d'une matrice est un polynôme en cette matrice.

Conclusion. Maintenant que 1., 2. et 3. sont démontrés par récurrence, on déduit de 2. que la suite est bien définie, et de 1. que pour $r \geqslant \log_2 n$, la matrice $P(A_r)$ est nilpotente d'ordre 1. Elle est donc nulle, et donc $A_{r+1} = A_r$. Comme P est scindé à racines simples, A_r est diagonalisable. Enfin, on peut écrire :

$$A - A_r = P(A_0)P'(A_0)^{-1} + \cdots + P(A_{r-1})P'(A_{r-1})^{-1},$$

somme dans laquelle chaque terme est nilpotent et où tout commute (tout est un polynôme en A). Donc $A - A_r$ est nilpotente et c'est aussi un polynôme en A, donc A_r et $A - A_r$ commutent. On a bien obtenu la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford de A. □

Remarques.

- C'est vraiment une bonne idée de motiver chaque argument par son analogue analytique. On cherche à récupérer D dans la décomposition $A = D + N$. Comme N est nilpotente, on doit y penser comme à un élément très petit, et donc imaginer que A est déjà très proche de la solution D. Ensuite, D est censée être solution de $P(D) = 0$ donc on peut imaginer adapter une méthode de Newton comme on fait d'habitude en analyse numérique : c'est exactement ce qui définit la suite (A_r). Pour démontrer que $P(A_r)$ est nilpotente d'indice de plus en plus petit par récurrence, on utilise une formule de Taylor : c'est normal, c'est ce que l'on ferait en analyse pour montrer que la méthode de Newton s'approche bien (et rapidement) de la solution. Donc toutes les étapes ici sont complètement naturelles si on sait faire les parallèles analytiques.
- On se place ici sur un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle. On demande à k d'être algébriquement clos pour ne pas avoir à se soucier du scindage des polynômes, mais bien sûr la méthode marche encore sur un corps algébriquement clos, tant que le polynôme caractéristique est scindé. Et même s'il n'est pas scindé, ça marche, mais on obtient un truc qui n'est pas forcément diagonalisable (mais qui l'est dans une clôture algébrique). On demande à k d'être de caractéristique nulle pour ne pas avoir de problème du type $P' = 0$ alors que P serait non nul. On peut alors remplacer la condition de caractéristique nulle par la perfection du corps.
- Il faut savoir démontrer que si M est une matrice inversible alors M^{-1} est un polynôme en M. Par exemple, $X \mapsto MX$ est un automorphisme de $k[M]$ car il est injectif en dimension finie. Ainsi, l'identité qui est dans $k[M]$ doit être l'image par cet automorphisme d'une certaine matrice $X \in k[M]$...
- Il est bon de connaître la complexité de cet algorithme. Avec les pivots de Gauss, l'algorithme d'Euclide et la borne sur l'indice où la suite stationne, on doit avoir un $O(n^4 \log n)$ opérations.

Recasages.

- 148 : La décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford est centrale dans la leçon, alors sa démonstration, surtout si elle est algorithmique et fait des liens avec l'analyse, est vraiment bienvenue.

- 153 : On utilise dans tous les sens des polynômes de matrices, et on utilise aussi plusieurs fois le fait que l'inverse d'une matrice est un polynôme en cette matrice. Et c'est pas seulement dans la démonstration, le fait que les parties diagonalisable et nilpotentes de la décomposition soient des polynômes en la matrice a des conséquences importantes (par exemple, on l'utilise pour démontrer le critère de Klarès).
- 154 : Pas la meilleure leçon, parce que peu d'espaces stables apparaissent vraiment. Mais on peut recaser si on en a vraiment besoin, en insistant lourdement sur les arguments théoriques sur les valeurs propres par exemple.
- 155 : Pas besoin de dire pourquoi ce développement rentre dans cette leçon, on fabrique une matrice diagonalisable importante à partir de n'importe quelle matrice à coefficients dans un corps algébriquement clos.
- 156 : On peut y mettre ce développement car il permet de calculer en pratique l'exponentielle d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. On calcule rapidement la décomposition, et l'exponentielle devient aussi facile à calculer que du beurre à étaler.
- 157 : Parfait pour le côté nilpotent, surtout qu'on en parle beaucoup pendant le développement. Le lien avec la trigonalisabilité est assez vague, on peut l'oublier.