Prérequis. Théorème de Riesz, critère de densité, espace de Sobolev $H_0^1(0,1)$

Théorème 0.0.1 (de Lax-Milgram)**.** *Soient H un espace de Hilbert, $\phi \in H'$ et $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive (il existe $\alpha > 0$ tel que $a(x,x) \geqslant \alpha\|x\|^2$). Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\phi = a(u,-)$. Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimum de :*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \phi(u).$$

Démonstration. Soit $x \in H$; le théorème de Riesz appliqué à $a(x,-)$ donne un unique $Tx \in H$ tel que $a(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ pour tout $y \in H$. La bilinéarité de a et l'unicité dans le théorème de Riesz montrent que T est linéaire, et la continuité de a montre que T est continu. Si $Tx = 0$ alors :

$$0 = \langle Tx, x\rangle = a(x,x) \geqslant \alpha\|x\|^2$$

donc T est injectif. Enfin, montrons que T est surjectif en montrant que son image est fermée. Pour toute suite $(y_n = Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans l'image de T qui converge vers $y \in H$, on a par Cauchy-Schwarz :

$$\alpha\|x\|^2 \leqslant a(x,x) = \langle Tx, x\rangle \leqslant \|Tx\|\|x\|$$

pour tout $x \in H$, d'où pour tous $p, q \in \mathbf{N}$:

$$\|y_p - y_q\| = \|Tx_p - Tx_q\| \geqslant \alpha\|x_p - x_q\|,$$

ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Elle converge vers un x dont l'image par T doit être y par continuité. Maintenant si y est orthogonal à l'image de T, alors on a :

$$\alpha\|y\|^2 \leqslant a(y,y) = \langle Ty, y\rangle = 0$$

donc $y = 0$, ce qui démontre que l'image de T, en plus d'être fermée, est dense dans H. Donc T est surjectif.

Il suffit alors de poser u' le représentant de Riesz de ϕ, puis $u = T^{-1}u'$. C'est clairement l'unique u qui convient. Si maintenant a est symétrique, alors pour tout $v \in H$ on a :

$$\frac{1}{2}a(u+v, u+v) - \phi(u+v) = \frac{1}{2}a(u,u) - \phi(u) + \frac{1}{2}a(v,v)$$

et le tout dernier terme est positif, et nul exactement lorsque $v = 0$. □

Théorème 0.0.2. *On considère le problème elliptique :*

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + u = f \\ \qquad u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Soient $\alpha \in \mathrm{L}^\infty([0,1])$ que l'on peut encadrer :

$$0 < \alpha_{\min} \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{\max},$$

$f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ et $\beta \in C^1([0,1])$ vérifiant $\beta' \leqslant 2$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ au problème elliptique, c'est-à-dire un unique u tel que pour tout $v \in H_0^1$,

$$\langle \alpha u', v' \rangle_2 + \langle \beta u', v \rangle_2 + \langle u, v \rangle_2 = \langle f, v \rangle_2.$$

Démonstration. On appelle $a(u,v)$ le membre de gauche. Comme H_0^1 est de Hilbert et $\langle f, - \rangle_2$ est continue, il suffit de démontrer que a est bilinéaire continue et coercive. La bilinéarité est évidente, et la continuité est facile :

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leqslant \alpha_{\max} \|u'\|_2 \|v'\|_2 + \|\beta\|_\infty \|u'\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &\leqslant C \|u\| \|v\|_2 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Poincaré. Pour la coercivité, soit $u \in H_0^1$. Alors :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \langle \alpha u', u' \rangle_2 + \langle \beta u', u \rangle_2 + \|u\|_2^2 \\ &\geqslant \alpha_{\min} \|u'\|_2^2 + \langle \beta u', u \rangle_2 + \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Si u est lisse à support compact dans $]0,1[$ alors par intégration par parties :

$$\langle \beta u', u \rangle_2 = \int_0^1 \beta u' u = -\frac{1}{2} \int_0^1 \beta' u^2 \geqslant -\|u\|_2^2.$$

Par continuité du produit scalaire et densité des fonctions lisses à support compact dans H_0^1, c'est vrai pour tout u. Finalement :

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geqslant \alpha_{\min} \|u'\|_2^2 - \|u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \\ &\geqslant \alpha_{\min} \|u'\|_2^2 \\ &\geqslant C' \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Le théorème de Lax-Milgram conclut. □

Remarques.

- Si l'on rajoute des hypothèses (notamment la continuité de f), alors on peut montrer que l'unique solution faible est en fait de classe C^2, puis en fait une solution forte. Ainsi on a résolu le problème elliptique en passant par des solutions faibles dans des espaces de Hilbert ! C'est une bonne application de la théorie des distributions et de la théorie des espaces de Hilbert à l'étude d'équations différentielles.
- Il existe d'autres hypothèses possibles sur α, β et f pour que le résultat soit vrai, mais celles-ci ont l'air d'être les plus simples à retenir et à utiliser.

— Le théorème de Lax-Milgram peut être précisé en le théorème de Stampacchia (c'est une lignée évolutive de Pokémon : Riesz → Lax-Milgram → Stampacchia). Il énonce que sous les mêmes hypothèses, pour tout compact K de H il existe un unique $u \in K$ tel que pour tout $v \in K$:

$$a(u, v-u) \geqslant \phi(v-u).$$

Et de même, si a est symétrique alors u est l'unique minimum de la même fonctionnelle que dans l'énoncé de Lax-Milgram. Le théorème de Stampacchia peut par exemple servir en physique pour établir des théorèmes à propos de l'énergie d'un système mécanique.

Recasages.

— 205 : On utilise la complétude de H pour montrer que l'image de T est fermée. Sinon c'est un théorème assez usuel dans les parties sur les espaces de Hilbert, et il est très possible de faire une partie sur les espaces de Hilbert dans cette leçon.

— 213 : C'est bien de mettre ce théorème après celui de Riesz par exemple, en ajoutant la définition et l'étude de l'espace de Sobolev $H_0^1(0,1)$. Pour les résultats de base qui sont utilisés ici, voir Hirsch-Lacombe, chapitre 10.

— 220 : Il est assez impressionnant que des théorèmes abstraits à propos d'espaces de Hilbert comme le théorème de Riesz ou celui de Lax-Milgram permettent de résoudre des problèmes aussi concrets qu'une équation différentielle. Bien sûr presque toute la théorie des équations différentielles se base sur l'analyse fonctionnelle de tels espaces, mais ce développement en est une bonne illustration.