Prérequis. Sous-groupe dérivé ; groupe résoluble ; cotrigonalisabilité.

Théorème 0.0.1. *Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Alors toutes les matrices de G sont trigonalisables dans une même base.*

Démonstration. Si G est abélien, le résultat est déjà démontré parce que des matrices trigonalisables qui commutent sont cotrigonalisables. On suppose donc G non abélien, et $n \geqslant 2$: on va montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbf{C}^n$ non trivial stable par G.

Soit alors $m \geqslant 2$ tel que $D^m G = 1$, et posons $H = D^{m-1}G$ qui n'est pas trivial. Comme $DH = 1$, les matrices de H sont cotrigonalisables donc il existe un vecteur $x \in \mathbf{C}^n$ non nul et propre pour toutes les matrices de H.

Pour $g \in G$ et $h \in H$, comme H est distingué dans G on a $g^{-1}hg \in H$, soit λ sa valeur propre pour x. On a :

$$h(g(x)) = gg^{-1}hg(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

donc $g(x)$ est aussi propre pour tout H (il n'est pas nul car g est inversible et x n'est pas nul).

Pour tout vecteur $y \in \mathbf{C}^n$ propre pour tout H, on pose :

$$\Lambda_y \colon \begin{array}{r@{\;}l} H & \longrightarrow \mathbf{C} \\ h & \longmapsto \text{la valeur propre de } h \text{ en } y. \end{array}$$

Ce qui précède montre que $\Lambda_{g(x)}(h) = \Lambda_x(g^{-1}hg)$, donc :

$$\Lambda_{-(x)}(h) \colon \begin{array}{r@{\;}l} G & \longrightarrow \mathbf{C} \\ g & \longmapsto \Lambda_{g(x)}(h) \end{array}$$

est une application continue pour tout $h \in H$. Son image est donc connexe et incluse dans le spectre de h donc est un singleton, et l'on en déduit que $V = \mathrm{Vect}(G \cdot x)$ est un espace (stable par G et) propre pour tout élément de H.

Il ne reste plus qu'à montrer que V n'est pas trivial. Clairement $V \neq 0$ parce que $x \in V$, supposons alors $V = \mathbf{C}^n$. Cela entraîne que H n'est composé que d'homothéties, sauf que H est aussi un sous-groupe dérivé donc engendré par des commutateurs, donc tous les éléments de H sont de déterminant 1, donc ces homothéties sont de rapport une racine de l'unité. Le sous-groupe dérivé d'un groupe connexe est toujours connexe, donc $H = 1$ ce qui est absurde.

On a donc trouvé $0 \neq V \neq \mathbf{C}^n$ un sous-espace stable par G. On en choisit un supplémentaire W, et dans une base adaptée, les éléments $g \in G$ s'écrivent :

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}.$$

Les applications :

$$\begin{array}{r@{\;}l} G & \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto g_1, \end{array} \qquad \begin{array}{r@{\;}l} G & \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{C}^n/V) \\ g & \longmapsto g_2 \end{array}$$

sont des morphismes de groupes continus, donc d'image connexe et résoluble. Une récurrence montre alors que les g_1 et les g_2 se trigonalisent tous dans une même base bien choisie, et cela termine la démonstration. $\square$

Remarques.

- Le développement cache beaucoup de choses qu'il faut absolument savoir démontrer. Si on sait les démontrer, il fait un bel effet :
  - L'image d'un groupe résoluble par un morphisme de groupes est encore résoluble :
    Soit $\phi : G \to H$ avec G résoluble. Pour tout n, on montre que $\phi(D^nG) \subset D^nH$ avec égalité si et seulement si ϕ est surjectif. On le fait par récurrence, en remarquant que $\phi([D^nG, D^nG]) = [\phi(D^nG), \phi(D^nG)]$ donc $\phi(D^{n+1}G) = D\phi(D^nG) = DD^n \operatorname{Im}(\phi) = D^{n+1} \operatorname{Im}(\phi)$.
  - L'image d'un connexe par une application continue est connexe :
    C'est le théorème des valeurs intermédiaires. Un espace X est connexe si et seulement si toute application continue $X \to \{0, 1\}$ est constante (c'est juste une reformulation de la définition de la connexité). Ainsi si $f : X \to Y$ est continue, alors pour toute application continue $g : f(X) \to \{0, 1\}$ on obtient une application continue $gf : X \to \{0, 1\}$ qui est donc constante, et comme f est surjective sur $f(X)$, on en déduit que g est constante.
  - Le sous-groupe dérivé DG d'un groupe G est toujours distingué dans G :
    Il est même caractéristique. Si ϕ est un automorphisme de G, alors pour tous $g, h \in G$ on a $\phi([g, h]) = [\phi(g), \phi(h)]$. Ainsi DG est stable par tout automorphisme, en particulier les automorphismes intérieurs.
  - Le sous-groupe dérivé DG d'un groupe connexe G est encore connexe :
    Soit S l'ensemble des commutateurs dans G. On dispose de l'application commutateur $G \times G \to S$ qui est continue et surjective, ce qui montre que S est connexe. Ensuite, pour $m \in \mathbf{N}$, on note S_m l'ensemble des produits de m commutateurs. On dispose de l'application de produit $S^m \to S_m$ qui est aussi continue et surjective, donc S_m est connexe. Enfin, DG est la réunion de tous les S_m, qui sont tous connexes et s'intersectent tous en 1.
  - L'application Λ_y est continue :
    Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Alors $\Lambda_y^{-1}(U) = \{h \in H \mid \exists u \in U,\ h(y) = uy\} = \{h \in H \mid h(y) \in Uy\}$. Comme Uy est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ et l'application $h \mapsto h(y)$ est continue, $\Lambda_y^{-1}(U)$ est bien ouvert.
  - Des matrices trigonalisables qui commutent sont trigonalisables dans une même base :
    Comme elles commutent, les espaces propres de l'une sont stables par les autres. On peut par exemple faire une récurrence en disant qu'il existe un vecteur propre pour tout le monde, puis quotienter.
- Il est aussi important de maîtriser ce qu'on entend par $g \mapsto g_1$ et $g \mapsto g_2$ à la fin. La première application ne pose pas de problème parce que V est stable par g donc g_1 est bien défini comme un endomorphisme de V, mais g_2 n'est pas un endomorphisme de W (car W n'est pas stable a priori). Par contre, comme g stabilise V, il induit un endomorphisme sur le quotient $\mathbf{C}^n/V$ (qui est isomorphe à W). C'est cet endomorphisme qui est représenté par g_2. Ce raisonnement ne pose aucun problème pour montrer que c'est un morphisme de groupe continu.
- On utilise le fait que $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, pour dire que toutes nos matrices

sont trigonalisables. Par exemple, $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ est connexe et résoluble (il est abélien, difféomorphe au cercle) mais bien sûr presque aucune matrice de rotation n'est trigonalisable sur $\mathbf{R}$.

— La démonstration est vraie si l'on considère la topologie de Zariski sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, ce qui est plus fort car il y a plus de connexes. Et la démonstration ne change pas.

— Même après avoir demandé sur StackExchange, je n'ai pas trouvé d'exemple de sous-groupe résoluble et connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui ne soit pas déjà trivialement trigonalisable. De mémoire de mon premier oral blanc, le deuxième groupe spécial orthogonal sur $\mathbf{C}$ (qui est en général remplacé par le groupe spécial unitaire) est un exemple. Par contre le théorème a pour conséquence immédiate que les représentations irréductibles de dimension finie des groupes algébriques linéaires connexes et résolubles sont toutes de dimension un. C'est aussi vrai pour les algèbres de Lie résolubles ; c'est le théorème de Lie.

Recasages.

— 103 : Pas la meilleure leçon pour ce développement, mais on y utilise le sous-groupe dérivé et la continuité de la conjugaison dans les groupes topologiques. C'est un peu lointain comme lien, mais ça peut se justifier, si on entoure le développement d'une sous-partie topologique.

— 106 : Le développement est très bien dans cette leçon. On peut par exemple le voir dans une partie à propos de la topologie dans les groupes linéaires, ou bien si l'on donne des exemples de groupes de matrices résolubles.

— 149 : J'avais surtout besoin d'un développement dans cette leçon que je déteste. Le développement s'y justifie quand même, puisque l'on explique que des matrices qui commutent sont cotrigonalisables. On passe son temps dans ce développement à chercher un sous-espace stable à coups d'applications Λ qui calculent des valeurs propres, donc pourquoi pas. C'est surtout la démonstration qui est dans le sujet, plus que l'énoncé : donc il faut bien expliquer que la démonstration utilisera ce qui est vu dans le plan.

— 154 : C'est parfait aussi, on utilise bien le raisonnement usuel par récurrence sur la dimension, qui nous permet de passer de l'existence d'un sous-espace stable à la cotrigonalisabilité.

— 157 : Pareil, c'est parfait. Quoi de mieux dans la leçon sur les endomorphismes trigonalisables que d'en trigonaliser une infinité d'un seul coup ?