**Prérequis.** Décomposition en produits de cycles à supports disjoints, moments factoriels d'une loi de Poisson.

**Théorème 0.0.1.** *Pour $n \geqslant 1$, on considère $\pi_n$ une variable aléatoire de loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $c_j(\pi_n)$ le nombre de cycles de longueur $j$ qui apparaissent dans la décomposition de $\pi_n$ en produit de cycles à supports disjoints. Alors lorsque $n$ tend vers l'infini, $c_j(\pi_n)$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $1/j$.*

*Démonstration.* On commence par déterminer la loi de $c(\pi_n)$.

**Lemme 0.0.2.** *Pour $k \in \mathbf{N}^n$, on a :*

$$\mathbb{P}(c(\pi_n) = k) = \left( \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^{k_j} \frac{1}{k_j!} \right) \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^n jk_j = n}.$$

*Démonstration.* On remarque déjà que $k$ est la structure des cycles d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si $\sum_{j=1}^n jk_j = n$. On suppose cette condition vérifiée et l'on va compter le nombre $N_k$ de permutations qui ont cette structure, c'est-à-dire le cardinal de la classe de conjugaison $C_\sigma$ d'un élément $\sigma$ qui a cette structure. Soit $Z_\sigma$ le centralisateur de $\sigma$, on a :

$$N_k |Z_\sigma| = |\mathfrak{S}_n| = n!.$$

Pour qu'un élément commute avec $\sigma$, il faut et il suffit :

- soit qu'il décale les éléments des cycles, il y a $\ell$ manières de faire cela pour chaque cycle de longueur $\ell$, donc un total de $\prod_{j=1}^n j^{k_j}$ choix ;
- soit qu'il permute les cycles de longueurs identiques entre eux, soit un total de $\prod_{j=1}^n k_j!$ choix.

Le cardinal du centralisateur est alors $|Z_\sigma| = \prod_{j=1}^n j^{k_j} k_j!$, d'où :

$$\mathbb{P}(c(\pi_n) = k) = \frac{N_k}{n!} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j} k_j!}.$$

□

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $r$ un entier strictement positif, on pose $x^{[r]} = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-r+1)$. On peut alors calculer les moments factoriels :

**Lemme 0.0.3.** *Pour tout $m \in \mathbf{N}^n$, on a :*

$$\mathbb{E}\left[ \prod_{j=1}^{n} c_j(\pi_n)^{[m_j]} \right] = \left( \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^{m_j} \right) \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^n jm_j \leqslant n}.$$

*Démonstration.* Si $\sum_{j=1}^{n} jm_j > n$, alors quelle que soit la valeur de $\pi_n$, il existe $j_0$ tel que $m_{j_0} > c_{j_0}(\pi_n)$ et alors $c_{j_0}(\pi_n)^{[m_{j_0}]} = 0$ donc le produit est nul. Supposons que ce ne soit pas le cas. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} c_j(\pi_n)^{[m_j]}\right] &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \mathbb{P}(\pi_n = \pi) \prod_{j=1}^{n} c_j(\pi)^{[m_n]} \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}^n} \frac{1}{n!} \sum_{c(\pi)=k} \prod_{j=1}^{n} k_j^{[m_j]} \\
&= \sum_{k\in\mathbf{N}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{k_j^{[m_j]}}{j^{k_j} k_j!} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{m_j}} \left( \sum_{k\in\mathbf{N}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{k_j - m_j}(k_j - m_j)!} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{m_j}} \left( \sum_{k\in\mathbf{N}^n} \mathbb{P}(c(\pi_n) = (k_1 - m_1, \ldots, k_n - m_n)) \right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{m_j}}.
\end{aligned}$$

□

On applique maintenant ce lemme à $(0, \ldots, 0, m, 0, \ldots, 0)$ pour obtenir que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et tout $m \geqslant 0$, on a :

$$\mathbb{E}[c_j(\pi_n)^{[m]}] = \left(\frac{1}{j}\right)^m \mathbf{1}_{jm\leqslant n}.$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini, on observe alors que le moment factoriel d'ordre $m$ de la loi limite de $c_j(\pi_n)$ est $\left(\frac{1}{j}\right)^m$, qui est exactement le moment factoriel d'ordre $m$ d'une loi de Poisson de paramètre $1/j$.

C'est terminé, car les variables aléatoires en jeu sont à valeurs entières. Les lois et la convergence en loi se lisent sur les fonctions génératrices, dont les coefficients (quand on les développe autour de 1) donnent justement les moments factoriels. Une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ a pour fonction génératrice $\exp(\lambda(t-1))$, donc son moment factoriel d'ordre $m$ est $\lambda^m$. □

**Remarques.**

— Il est difficile de trouver une source accessible pour ce raisonnement, donc il faut l'apprendre par cœur. Il est quand même fait page 11 de *Logarithmic Combinatorial Structures : a Probabilistic Approach* de Arratia, Barbour et Tavaré. Le plus dur est presque de retenir les énoncés des deux lemmes, la démonstration du premier est assez simple (et si on ne la retrouve pas, on peut s'en sortir à la main en comptant tous les choix de cycles). C'est la démonstration du second qui peut être technique à retenir.

— On peut expliquer, s'il reste du temps à la fin, que le résultat est vrai pour la loi jointe, et pas seulement pour les marginales. L'argument est le même, on peut calculer la fonction génératrice de la loi jointe et trouver $\bigotimes_j \mathcal{P}\left(\frac{1}{j}\right)$.

— Une conséquence immédiate de ce théorème est un autre développement plus facile : le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1.

**Recasages.**

— 104 : C'est un peu limite, mais si l'on fait une grande partie sur l'étude des groupes symétriques, ça peut bien rentrer. On utilise quand même la relation orbite-stabilisateur, donc c'est dans le thème.

— 105 : De même que pour la 104, mais cette fois c'est déjà beaucoup plus dans le thème. On pourrait faire une grosse partie sur les permutations aléatoires.

— 261 : C'est parfait, et on utilise la caractérisation de la loi d'une variable discrète par ses moments factoriels (enfin, par sa fonction génératrice).

— 262 : C'est aussi parfait, on utilise la caractérisation de la convergence en loi aussi.

— 264 : Les permutations aléatoires sont un gros exemple de variables aléatoires discrètes, et qui change un peu des habituelles variables à valeurs entières. De quoi donner un élan de fraîcheur à cette leçon.