

Prérequis. Lemme des noyaux

Théorème 0.0.1. Soient $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de classe C^1 , u un zéro de f et A la différentielle de f en u . On s'intéresse au système différentiel :

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

qui se linéarise en :

$$\begin{cases} z' = Az, \\ z(0) = y_0 - u. \end{cases}$$

Si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative alors :

1. 0 est un point attractif du système linéarisé ;
2. u est un point attractif du système non-linéaire ;
3. Si y_0 est assez proche de u alors $y(t) \rightarrow u$ avec vitesse exponentielle.

Démonstration. Le système linéarisé se résout en $z(t) = e^{tA}z(0)$, pour démontrer le point 1 il suffit donc de montrer le lemme suivant.

Lemme 0.0.2. Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un \mathbf{R} -espace vectoriel normé E . Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est la liste des valeurs propres distinctes de a alors il existe un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\|e^{ta}\| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t\Re(\lambda_i)}.$$

Démonstration. Le lemme des noyaux donne une décomposition :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$$

et donc des projections $p_i : E \rightarrow E_i$ et des inclusions $q_i : E_i \rightarrow E$, qui vérifient les propriétés suivantes :

- $p_i q_i = \text{id}_{E_i}$ pour tout i et $p_j q_i = 0$ si $i \neq j$;
- $\sum_{i=1}^r q_i p_i = \text{id}_E$.

On note alors $a_i = p_i a q_i$ pour tout i de sorte à avoir $a = \sum_i q_i a_i p_i$, et de manière générale $a^n = \sum_i q_i a_i^n p_i$ d'où :

$$e^{ta} = \sum_{i=1}^r q_i e^{ta_i} p_i = \sum_{i=1}^r q_i e^{t\lambda_i} e^{t(a_i - \lambda_i \text{id}_{E_i})} p_i.$$

Comme $a_i - \lambda_i \text{id}_{E_i}$ est nilpotent d'indice la multiplicité m_i , on a :

$$\|e^{ta_i}\| \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \|a_i - \lambda_i \text{id}_{E_i}\|^k$$

et l'on peut alors conclure :

$$\|e^{ta}\| \leq \left(\sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \|a_i - \lambda_i \text{id}_{E_i}\|^k \right) \sum_{i=1}^r e^{t\Re(\lambda_i)}.$$

□

On obtient directement le point 1, que l'on veut généraliser au système non-linéaire. Pour cela, on introduit une forme bilinéaire symétrique :

$$b(x, x') = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}x' \rangle dt$$

qui est en fait définie positive, c'est un produit scalaire. Notons q la forme quadratique associée.

Soit alors y une solution du système non-linéaire. On va montrer que y s'approche de u au sens suivant :

Proposition 0.0.3. *Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que si $q(y(t) - u) \leq \alpha$ alors :*

$$\frac{d}{dt}q(y(t) - u) \leq -\beta q(y(t) - u) \leq 0.$$

Démonstration. Calculons premièrement :

$$dq(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle dx = -\|x\|^2.$$

Cela démontre que Ax est orienté vers l'intérieur de l'ellipsoïde $\{x' \mid q(x') = q(x)\}$, puisque son produit scalaire avec le vecteur normal $\nabla q(x)$ est négatif.

On pose $r(y) = f(y) - A(y - u)$, et on dérive :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(y - u) &= dq(y - u)f(y) \\ &= dq(y - u)(A(y - u)) + dq(y - u)(r(y)) \\ &= -\|y - u\|^2 + 2b(y - u, r(y)). \end{aligned}$$

On va maintenant utiliser l'équivalence des normes pour contrôler les deux termes qui sont apparus. Pour le premier, l'équivalence des normes donne directement un $\beta > 0$ tel que :

$$-\|y - u\|^2 \leq -2\beta q(y - u).$$

Pour le second, on sait que f est différentiable pour n'importe quelle norme sur \mathbf{R}^n , en particulier pour \sqrt{q} : il existe $\varepsilon : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de limite nulle en 0 telle que :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(u) + df(u)(y - u) + \sqrt{q(y - u)}\varepsilon(y - u) \\ &= A(y - u) + \sqrt{q(y - u)}\varepsilon(y - u) \end{aligned}$$

d'où $r(y) = \sqrt{q(y-u)}\varepsilon(y-u)$. Par Cauchy-Schwarz on obtient :

$$b(y-u, r(y)) \leq \sqrt{q(y-u)}\sqrt{q(y-u)}\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} = q(y-u)\sqrt{q(\varepsilon(y-u))}.$$

Pour y assez proche de u on a $\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} \leq \beta/2$ ce qui donne le résultat. \square

On peut maintenant conclure avec le lemme de Gronwall :

$$q(y-u) \leq \alpha e^{-\beta t}.$$

\square

Remarques.

- On peut passer plus rapidement sur le lemme car ce n'est pas le point 1 le plus important. D'ailleurs les systèmes linéaires sont leur propre linéarisé donc il n'y aurait même pas besoin d'expliquer ce point.
- Faire un dessin pour expliquer le sens de $dq(x)(Ax) = -\|x\|^2$ peut être une très bonne idée. De même, c'est bien de motiver l'existence de la proposition.
- La forme quadratique q est une *fonction de Lyapounov*, car elle s'annule en 0, est strictement positive dans un voisinage de 0 (sauf en 0) et sa dérivée le long du champ de vecteurs A est négative dans un voisinage de l'origine. Les fonctions de Lyapounov servent plus généralement à étudier la stabilité des systèmes différentiels. L'idée est celle donnée dans le développement : comme la dérivée le long du champ de vecteurs est négative, la solution ne peut pas s'échapper d'un ellipsoïde qui devient de plus en plus petit si la dérivée est strictement négative. On obtient alors un point d'équilibre asymptotiquement stable.
- Comme on choisit f de classe C^1 , on passe sous le tapis l'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il n'est pas crucial car ce serait valable même si aucune solution n'existait.

Recasages.

- 206 : Une très bonne alternative au théorème de Cauchy-Lipschitz. On utilise à plusieurs reprises l'équivalence des normes et donc le fait que l'on est en dimension finie. On pourrait chercher un contre-exemple en dimension infinie mais je n'en connais pas.
- 215 : On illustre le principe intuitif derrière le gradient, et l'on différencie plusieurs fois donc c'est dans le thème. Attention quand même à bien placer soigneusement l'énoncé dans le plan pour ne pas que ça fasse tache.
- 220 : Il n'y a rien à dire, les théorèmes de stabilité peuvent même faire une partie toute entière.
- 221 : Pareil que pour la 220, on illustre parfaitement le principe de linéarisation, qui apparaît partout en mathématiques. On ne comprend pas bien les systèmes non-linéaires, alors on se ramène au cas linéaire. Et le théorème de Lyapounov en est un exemple frappant et simple à comprendre.