Prérequis. Théorème d'Ascoli, inégalité des accroissements finis, théorème de Baire, théorème de Weierstrass

Théorème 0.0.1 (de Montel)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Alors de toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes sur U qui est bornée (elle est bornée pour $\|.\|_{\infty,K}$ pour tout compact K de U), on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Soit K un compact de U. On veut extraire une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément sur K, donc on peut appliquer le théorème d'Ascoli.

(f_n) est ponctuellement bornée. Comme (f_n) est bornée pour $\|.\|_{\infty,K}$, elle est bornée en tout point.

(f_n) est équicontinue. Soient $z_0 \in K$ et $\varepsilon > 0$. On inclut un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ dans U qui est ouvert, et l'inégalité des accroissements finis donne pour $z \in \overline{D}(z_0, r/2)$:

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leqslant \|f_n'\|_{\infty,\overline{D}(z_0,r/2)}|z - z_0|.$$

On conclut avec le lemme suivant.

Lemme 0.0.2. *Il existe $M > 0$ tel que pour toute fonction holomorphe f sur U :*

$$\|f'\|_{\infty,\overline{D}(z_0,r/2)} \leqslant M\|f\|_{\infty,\overline{D}(z_0,r)}.$$

Démonstration. Pour $z \in \overline{D}(z_0, r/2)$, on a la formule de Cauchy :

$$f'(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\ \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z)^2}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\ \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}{(r/2)^2} r\ \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{4}{r}\|f\|_{\infty,\overline{D}(z_0,r)} \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Le lemme permet de conclure puisque la suite $\|f_n\|_{\infty,\overline{D}(z_0,r)}$ est bornée.

Le théorème d'Ascoli s'applique alors, et permet d'extraire une sous-suite qui converge uniformément sur K. Pour conclure, il suffit de trouver une suite exhaustive de compacts pour U, par exemple :

$$K_n = \{z \in U \mid |z| \leqslant n, d(z, U^{\mathrm{c}}) \geqslant 1/n\}$$

puis de faire une extraction diagonale. □

Théorème 0.0.3 (d'Osgood). *Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge simplement vers une fonction (quelconque) f. Alors f est holomorphe sur un ouvert dense dans U.*

Démonstration. Soit $\overline{D}$ un disque fermé inclus dans U, il suffit de montrer que f est holomorphe sur un ouvert V inclus dans $\overline{D}$. En posant :

$$F_k = \{z \in \overline{D} \mid \sup_{n\in\mathbf{N}} |f_n(z)| \leqslant k\},$$

on remarque que $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} F_k = \overline{D}$. Comme $\overline{D}$ est complet on peut appliquer le lemme de Baire, et trouver un F_{k_0} d'intérieur non vide. On choisit V un ouvert inclus dans F_{k_0}. Mais alors la suite (f_n) est bornée sur tout compact de V, et le théorème de Montel donne une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de V. Par théorème de Weierstrass, la limite, qui coïncide avec f, doit être holomorphe sur V. □

Remarques.

- Le théorème de Montel sert à d'autres choses qu'à démontrer le théorème d'Osgood. Par exemple, on peut l'utiliser pour démontrer le théorème de l'application conforme de Riemann, qui énonce que les seuls ouverts simplement connexes de $\mathbf{C}$ (à biholomorphisme près) sont $\mathbf{C}$ et le disque unité (cf. Rudin, théorème 14.8 page 330). Une autre application est le théorème de Henri Cartan en dynamique discrète (cf. Zuily-Queffélec, théorème III.7 page 161).
- Mieux vaut savoir détailler le passage de K à tous les compacts avec l'extraction diagonale. La suite exhaustive de compacts permet de recouvrir l'ouvert U avec un nombre dénombrable de compacts, ce qui permet l'extraction diagonale.
- Le théorème d'Osgood sert peut-être (?) à démontrer des résultats théoriques, mais en pratique on ne connaît pas l'ouvert sur lequel la limite est holomorphe, et donc c'est à peu près inutilisable.

Recasages.

- 201 : L'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est, comme les espaces de Fréchet C^∞, un espace souvent un peu oublié dans cette leçon. C'est bien de ne pas se restreindre aux espaces vectoriels normés, surtout si l'on a des choses à dire sur les espaces en eux-mêmes. Ici on montre que les parties bornées de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ sont séquentiellement compactes, grâce à la rigidité de l'analyse complexe.
- 203 : On utilise le théorème d'Ascoli, et on démontre un résultat de compacité (séquentielle) à la Bolzano-Weierstrass, que l'on utilise ensuite pour démontrer un théorème assez fort sur la convergence simple des fonctions holomorphes.
- 205 : La complétude sert ici à appliquer le théorème d'Ascoli, qui est en plein dans la leçon. On peut par exemple mettre le développement juste après Ascoli dans le plan.
- 241 : Le théorème illustre la rigidité bien connue des fonctions holomorphes. C'est bien de faire le parallèle avec les fonctions réelles, où la convergence simple est

très loin de conserver la dérivabilité. Attention quand même, la leçon demande de donner beaucoup d'exemples.

— 245 : L'essentiel de la démonstration du théorème de Montel se trouve dans le lemme, qui est une inégalité miraculeuse provenant de la formule de Cauchy (comme d'habitude). On pourrait citer tous les autres miracles que cette formule a pu créer, pour illustrer le début de la leçon.