

**Prérequis.** Aucun.

**Définition 0.0.1.** Étant donnée une tuile (un compact connexe d'intérieur non vide)  $P \subset \mathbf{R}^2$ , un sous-groupe  $G < \text{Isom}^+(\mathbf{R}^2)$  est dit *paveur*, *cristallographique* ou encore *de papier peint* pour  $P$  si :

- $\mathbf{R}^2 = \bigcup_{g \in G} gP$  ;
- $g\overset{\circ}{P} \cap h\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$  implique  $g = h$ .

**Théorème 0.0.2.** *Il y a cinq groupes de papier peint à conjugaison près.*

*Démonstration.* On commence par le lemme suivant.

**Lemme 0.0.3.** *On note  $T$  le sous-groupe distingué des translations ( $\text{Isom}^+(\mathbf{R}^2) = T \rtimes \text{SO}(2, \mathbf{R})$ ) et  $\Gamma = T \cap G$ . Alors  $\Gamma$  est un réseau : il existe  $u, v \in \mathbf{R}^2$  tel que  $\Gamma$  soit formé exactement des translations de vecteur  $\in \mathbf{Z}u \oplus \mathbf{Z}v$ .*

*Démonstration.* Si  $\Gamma = 1$  alors  $G$  n'a que des rotations. S'il y a deux rotations de centres distincts alors leur commutateur est une translation non triviale, ce qui est impossible. Donc elles ont toutes le même centre et il est impossible de paver le plan avec  $P$  puisque  $\bigcup_{g \in G} gP$  reste compact.

Si toutes les translations dans  $\Gamma$  étaient de directions parallèles, alors pour un élément  $r \in G \setminus \Gamma$  et  $t \in \Gamma$ , l'élément  $rtr^{-1} \in \Gamma$  serait une translation parallèle à  $t$ . Comme  $r$  est une isométrie différente de l'identité, c'est alors un retournement. Maintenant si deux retournements  $r$  et  $r'$  ont pour centres respectifs  $a$  et  $a'$ , alors  $r'r$  est une translation de vecteur  $2\overrightarrow{aa'}$ . Ainsi les centres des éléments de  $G \setminus \Gamma$  (qui sont tous des retournements) sont alignés sur une droite  $D$  parallèle à la direction des translations de  $\Gamma$ . Encore une fois, cela contredit  $\bigcup_{g \in G} gP = \mathbf{R}^2$  puisque la réunion est entièrement contenue dans une bande centrée en  $D$ .

Ainsi,  $\Gamma$  contient deux translations linéairement indépendantes. La difficulté à présent est de montrer l'existence d'une  $\mathbf{Z}$ -base à deux éléments pour  $\Gamma$ . On choisit dans  $\Gamma$  une translation non triviale de vecteur  $u$  de norme minimale. C'est possible avec le deuxième axiome de  $G$  : si  $(w_n)$  est une suite de vecteurs non nuls dont les normes tendent vers l'infimum, alors la suite des translations  $g_n$  de vecteurs  $w_{n+1} - w_n$  converge simplement vers l'identité. Pour  $n$  assez grand on a alors  $g_n\overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{P}$  non vide, et donc  $g_n$  stationne à l'identité.

De même, on peut choisir un vecteur  $v$  de norme minimale parmi  $\Gamma \setminus \mathbf{Z}u$ . On montre que les vecteurs  $u$  et  $v$  conviennent. Soient  $a$  un point fixé du plan affine et  $Q$  le parallélogramme :

$$Q = \{a + tu + sv : t, s \in [0, 1]\}.$$

Comme  $\mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v \subset \Gamma$ , les images  $gQ$  avec  $g \in \Gamma$  recouvrent le plan affine. Ainsi s'il existe un point de l'orbite de  $a$  sous  $\Gamma$  qui n'est pas dans  $a + \mathbf{Z}u + \mathbf{Z}v$ , alors il y en a aussi un, disons  $y$ , qui se trouve dans  $Q$ . Mais alors la distance de  $y$  à l'un des sommets de  $Q$  est strictement plus petite que  $\|u\|$  ou  $\|v\|$ , ce qui contredit le choix de  $u$  et  $v$ .  $\square$

On peut maintenant conclure. Soit  $g \in G$ . Notons  $t_u$  et  $t_v$  les translations de vecteurs respectifs  $u$  et  $v$ . On a  $gt_u g^{-1} = t_{\vec{g}(u)}$ , de même pour  $v$ . On écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{g}(u) = n_1 u + m_1 v \\ \vec{g}(v) = n_2 u + m_2 v \end{cases}$$

avec  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ . La matrice de  $\vec{g}$  dans la base  $(u, v)$  est alors  $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ . Ainsi

la trace de  $\vec{g}$ , qui est une rotation, est à la fois de la forme  $2 \cos \theta$ , et un entier  $n_1 + m_2$ .

Il ne reste alors plus que cinq cas possibles :

- si  $\cos \theta = -1$  alors  $\vec{g} = -\text{id}$  ;
- si  $\cos \theta = -1/2$  alors  $\vec{g}$  est d'angle  $2\pi/3$  ;
- si  $\cos \theta = 0$  alors  $\vec{g}$  est d'angle  $\pi/2$  ;
- si  $\cos \theta = 1/2$  alors  $\vec{g}$  est d'angle  $\pi/3$  ;
- si  $\cos \theta = 1$  alors  $\vec{g} = \text{id}$ .

L'image de  $G$  par l'homomorphisme flèche est alors cyclique engendré par une de ces cinq rotations (car c'est un sous-groupe de  $\text{SO}(2, \mathbf{R})$  qui est abélien, et si l'on compose deux rotations non triviales parmi ces cinq, on obtient une rotation impossible, par exemple d'angle  $5\pi/6$ ).  $\square$

### Remarques.

- C'est peut-être un peu long si l'on veut tout faire dans les détails. On peut passer un peu vite sur le fait que le deuxième axiome force l'infimum des normes à être atteint.
- C'est bien de connaître un pavage correspondant pour chacun des cinq groupes de papier peint. Ils sont dessinés dans Berger, page 13.
- C'est bien aussi de savoir que si l'on autorise les isométries non directes, alors il y a 17 groupes. Et en dimension trois, il y en a 230.

### Recasages.

- 101 : Le cas des espaces affines est un cas particulier important d'actions simplement transitives. Dans le développement, on utilise plusieurs fois cette action par translations. Et le résultat concerne les groupes de papier peint, qui sont par essence des groupes faits pour agir.
- 103 : On conjugue des translations par des isométries à deux reprises, illustrant au passage le principe de conjugaison dans les actions de groupes. Et l'on utilise aussi le fait que  $\Gamma$  est distingué. Les pavages sont une manière concrète et visuelle de comprendre ces concepts, donc le développement illustre parfaitement la leçon.
- 106 : Au moins comme remarque dans le plan, ce développement permet de remplir par exemple une partie ou une sous-partie qui traite de l'incarnation des groupes linéaires en géométrie affine. On peut y préciser le produit semi-direct (et celui analogue pour le groupe affine par exemple), faire le lien entre la géométrie affine et la géométrie vectorielle, ...

- 160 : C'est une idée, même si ça commence à être un peu limite. Le lien ici est l'intérêt du groupe spécial orthogonal, et de l'utilisation de la trace pour classifier les rotations possibles.
- 161 : C'est parfaitement dans le thème. Il n'y a pas mieux pour parler d'isométries que de classifier les pavages !
- 191 : Les techniques d'algèbre sont assez nombreuses dans ce développement. On utilise même une technique d'analyse pour trouver une base du réseau, mais ça, il faut pas le dire.