Prérequis. Théorème de Dirichlet sur les séries de Fourier, transformée de Fourier de la gaussienne

Théorème 0.0.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

avec la convention $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. La série du membre de gauche converge normalement sur tout compact de $\mathbf{R}$. En effet on sait qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M/(1+x^2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et alors pour tout x dans un compact $[-K, K]$ et tout $|n| \geqslant K$:

$$|f(x+2\pi n)| \leqslant \frac{M}{1+(x+2\pi n)^2} \leqslant \frac{M}{1+(2\pi|n|-K)^2} \in \ell^1 \text{ indépendant de } x.$$

On peut alors poser :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$. Cette fonction est de classe C^1, puisque le raisonnement ci-dessus s'applique aussi à f' et donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique.

De plus, F est 2π-périodique. En effet, pour $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on a :

$$\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} f(x+2\pi+2n\pi)}_{\to F(x+2n\pi)} = \underbrace{\sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+2n\pi)}_{\to F(x)} - \underbrace{f(x-2N\pi) - f(x-2(N+1)\pi)}_{\to 0}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Dirichlet à F :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(F)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

avec les coefficients de Fourier valant :

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2k\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2k\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(u-2k\pi)}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 0.0.2. *Pour tout $s > 0$, on définit :*

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s}$$

et l'on déduit de la formule de Poisson que :

$$\theta(-1/s) = \sqrt{s}\theta(s).$$

Démonstration. On pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2 s/4\pi}$ et l'on calcule sa transformée de Fourier : en la dérivant (avec théorème de dérivation des intégrales à paramètres) et en résolvant l'équation différentielle avec le calcul de l'intégrale de Gauss, on tombe finalement sur :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{s}} \mathrm{e}^{\frac{\xi^2 \pi}{s}}.$$

On applique alors la formule de Poisson en $x = 0$ pour obtenir l'équation fonctionnelle. □

Corollaire 0.0.3 (Cohn-Elkies)**.** *S'il existe une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ non identiquement nulle pour laquelle on dispose d'un $\delta > 0$ tel que f et $\widehat{f}$ soient dominées par $(1+|x|)^{-n-\delta}$, et vérifiant $f(x) \leqslant 0$ pour $|x| \geqslant 1$ et $\widehat{f}(\xi) \geqslant 0$ pour tout ξ, alors la densité de tout empilement de sphères en dimension n est majorée par $f(0)/2^n \widehat{f}(0)$.*

Idées de la démonstration. Il suffit de le démontrer pour les empilements périodiques, c'est-à-dire pour lesquels les centres des sphères sont situés sur les points d'un réseau Λ. On applique alors la formule de Poisson à f (écrite dans le théorème en dimension 1, elle est valable en dimension quelconque en remplaçant la somme sur les entiers et les multiples de 2π par des sommes sur les éléments de Λ) pour minorer $f(0)$ par une quantité proportionnelle à $\widehat{f}(0)/|\Lambda|$. □

Remarques.

— Faire seulement la formule de Poisson est trop court, alors il faut en général rajouter un petit corollaire. Un autre corollaire possible est le calcul de $\zeta(2)$, qui se fait en transformant la somme en une somme géométrique grâce à la formule de Poisson.

— L'équation fonctionnelle obtenue sur la fonction θ de Jacobi dans le corollaire n'est pas anodine. Premièrement elle permet d'établir une équation fonctionnelle sur la fonction ζ, mais plus généralement elle place θ au centre de la théorie des nombres, puisque cette relation trahit le fait que θ est une forme modulaire. Cette remarque est profondément liée à la remarque suivante.

— Le dernier corollaire n'a pas forcément vocation à être écrit dans le plan, mais peut être énoncé pendant la défense ou à la fin du développement. C'est un théorème miraculeux qui permet d'établir des majorations de la densité d'un empilement de sphères optimal rien qu'avec l'existence d'une certaine *fonction magique* (c'est leur nom). Maryna Viazovska, qui a reçu la médaille Fields en 2022 pour cela, a trouvé de telles fonctions magiques en dimensions 8 puis 24, qui ont donné une majoration égale à la minoration déjà connue d'un empilement optimal. Ainsi elle a démontré que l'empilement optimal en dimension 8 est donné par le réseau E_8, et celui en dimension 24 est donné par le réseau de Leech. C'est une remarque historique très récente qui permet d'ancrer le théorème dans les mathématiques d'aujourd'hui, donc c'est bienvenu à l'oral !

Recasages.

— 241 : On applique la convergence normale et le théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour obtenir la formule. On utilise aussi les séries de Fourier et leur convergence simple pour les fonctions continues et C^1 par morceaux : tout le contenu mathématique de la démonstration est une illustration de la leçon.

— 246 : La démonstration établit un léger lien entre les séries de Fourier et la transformation de Fourier. On illustre le théorème de Dirichlet à des problématiques concrètes, pour changer de l'habituel calcul de $\zeta(2)$.

— 250 : Il n'y a pas vraiment de connaissances à propos de la transformation de Fourier à mobiliser pour ce développement, en tout cas pour la démonstration de la formule de Poisson. Par contre, les nombreux corollaires à cette formule sont riches en transformation de Fourier, par exemple ici on calcule (une nouvelle fois) la transformée de Fourier de la gaussienne (ce qui peut prendre du temps, mais c'est probablement le plus intéressant dans ce développement pour cette leçon).

— 265 : Non seulement la formule de Poisson permet d'étudier des fonctions usuelles comme les fonctions trigonométriques et hyperboliques, mais elle montre toute sa force dans l'étude des fonctions spéciales. Le premier exemple est celui de la fonction θ de Jacobi, suivi de l'étude de la fonction ζ et éventuellement des empilements de sphères. De quoi remplir la leçon avec autre chose que la fonction Γ.