Prérequis. Formule du crible de Poincaré, équivalent de la série harmonique, formule d'inversion de Möbius et/ou valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$ (avec multiplicativité de la somme pour $*$)

Théorème 0.0.1. *Pour $n \geqslant 1$, soit r_n la probabilité que deux entiers choisis uniformément dans $\{1,\dots,n\}$ soient premiers entre eux. Alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $6/\pi^2$.*

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$. On fait la liste $p_1,\dots,p_k$ des nombres premiers inférieurs à n, et pour $i \leqslant k$ on pose :

$$U_i = \{(a,b) \in \{1,\dots,n\}^2 \mid p_i \text{ divise } a \text{ et } b\}.$$

Ainsi, si A est l'ensemble des couples (a,b) d'entiers premiers entre eux dans $\{1,\dots,n\}$, alors le complémentaire de A est la réunion des U_i. De plus, chaque intersection $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_m}$ est formée des couples de multiples de $p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_m}$, donc est de cardinal $\lfloor n/p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_m} \rfloor^2$. D'après la formule du crible de Poincaré, on a alors :

$$\begin{aligned}
n^2 r_n = |A| &= n^2 - \left| \bigcup_{i=1}^{k} U_i \right| \\
&= n^2 - \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} |U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_m}| \\
&= n^2 - \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor^2 \\
&= \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant k} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_m}} \right\rfloor^2 \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 .
\end{aligned}$$

On peut alors estimer asymptotiquement r_n par :

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = \left| \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right| .$$

De $\lfloor n/d \rfloor > n/d - 1$, on déduit en élevant au carré que :

$$\frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 > \frac{1}{d^2} - \frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2}.$$

L'inégalité triangulaire fournit alors :

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leqslant \sum_{d=1}^{n} \left(\frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2} \right) = O\left(\frac{\ln n}{n} \right),$$

d'où finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

□

Remarques.

- Le développement est très joli et est une illustration très forte de la formule du crible de Poincaré. Attention par contre, il faut plusieurs résultats pas forcément triviaux pour que ça marche.
- La formule du crible de Poincaré se démontre en développant le produit suivant :

$$(1-\mathbf{1}_{U_1})(1-\mathbf{1}_{U_2})\cdot\ldots\cdot(1-\mathbf{1}_{U_k}),$$

  qui est égal à l'indicatrice du complémentaire de la réunion des U_i.
- L'égalité suivante :

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant k} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_m}} \right\rfloor^2 = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

  se justifie en regroupant les deux sommes par $p_{i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_m} = d$ constant, le coefficient qui apparaît est soit 0 si d a un facteur carré (parce qu'il n'apparaît pas dans la somme), soit -1 si m est impair, soit $+1$ si m est pair.
- L'estimation par $\frac{\ln n}{n}$ provient de l'estimation des sommes partielles de la série harmonique qui sont en $\ln n$, on le démontre par comparaison série-intégrale.
- La toute dernière égalité peut se justifier de deux manières dans le plan. Soit on écrit d'abord le théorème qui dit que si f et g sont deux fonctions multiplicatives dont les séries de Dirichlet convergent absolument en s alors c'est aussi le cas de $f*g$ et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(f*g)(n)}{n^s},$$

  en l'appliquant alors à $f=1$ et $g=\mu$ avec le théorème d'inversion de Möbius, soit on explique *à la main* que la somme est l'inverse de $\zeta(2)$. Cela revient au même mais le calcul peut être plus court : on a juste à expliquer que les familles en jeu sont sommables et donc qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{d,n\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{(dn)^2}\\ &= \sum_{m\geqslant 1}\sum_{d\mid m}\frac{\mu(d)}{m^2}\\ &= \sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}\underbrace{\sum_{d\mid m}\mu(d)}_{=\delta_{p,1}} = 1.\end{aligned}$$

Bien sûr cela revient au même puisque c'est comme ça qu'on démontre le théorème en question, et que l'on a utilisé le théorème d'inversion de Möbius pour la toute dernière égalité.

— Justement, la formule d'inversion de Möbius est équivalente à dire que la somme $\sum_{d|m} \mu(d)$ vaut 1 si $m = 1$ et 0 sinon. Pour montrer cela, on dit que c'est évident pour $m = 1$, et sinon on note P l'ensemble des facteurs premiers de m pour avoir :

$$\begin{aligned}\sum_{d|m} \mu(d) &= \sum_{D \subset P} \mu\left(\prod_{p \in D} p\right) = \sum_{D \subset P} (-1)^{|D|} \\ &= \sum_{t=0}^{|P|} (-1)^t |\{D \subset P \mid |D| = t\}| = \sum_{t=0}^{|P|} (-1)^t \binom{|P|}{t} \\ &= (-1+1)^t = 0.\end{aligned}$$

Recasages.

— 121 : C'est très bien pour illustrer l'utilité de la fonction de Möbius si on l'introduit, et c'est un des rares résultats assez forts sur la répartition des nombres premiers qui est accessible en développement.

— 190 : On illustre magistralement la formule du crible de Poincaré (il y a d'autres applications, comme compter le nombre de surjections entre deux ensembles finis fixés) et par la même occasion la formule d'inversion de Möbius qui sert dans d'autres problèmes de combinatoire (comme compter le nombres de polynômes irréductibles d'un certain degré sur un certain corps fini).

— 230 : Le développement a deux liens majeurs avec cette leçon. Le premier est l'estimation de la somme harmonique, qui permet d'établir que r_n vaut bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$. L'autre est le calcul de cette somme, qui se fait avec des théorèmes de familles sommables, donc en plein dans la leçon aussi.