Prérequis. Relèvement exponentiel, formule de la moyenne, formule de Cauchy

Théorème 0.0.1. *Soit Z une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ qui s'écrit $X+Y$ avec X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$. Alors X et Y sont aussi de Poisson.*

Démonstration. On note G les séries génératrices, de manière à avoir :

$$G_Z(s) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}, \quad \text{et} \quad G_Z = G_X G_Y.$$

On montre que G_X et G_Y sont entières. Pour cela, on remarque que par indépendance :

$$\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=0) \leqslant \mathbb{P}(Z=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

et $\mathbb{P}(Y=0)$ n'est pas nul puisque $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Z=0) \neq 0$. Ainsi $\mathbb{P}(X=n) = O(\lambda^n/n!)$ et G_X est de rayon infini. De même pour G_Y.

Comme G_Z ne s'annule pas il en est de même pour G_X et G_Y, qui peuvent alors se relever en $G_X = \exp(f)$ et $G_Y = \exp(g)$. Pour tout $s \in \mathbf{C}$ on a :

$$\exp(f(s)+g(s)) = \exp(\lambda(s-1))$$

et comme $s \mapsto f(s)+g(s)-\lambda(s-1)$ est continue à valeurs dans un espace discret elle est constante. Or G_X et G_Y sont réelles positives sur $[0,+\infty[$ donc on peut supposer que $f(x), g(x) \in \mathbf{R}$ pour $x \in \mathbf{R}$, et en déduire que $f(s)+g(s) = \lambda(s-1)$ pour tout $s \in \mathbf{C}$.

Comme $X \leqslant Z$ on dispose alors de la majoration :

$$\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(f(s))} = \left|\mathbb{E}\left[s^X\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left(|s|^Z\right) = \mathrm{e}^{\lambda(|s|-1)}$$

d'où $\mathfrak{Re}(f(s)) \leqslant \lambda(|s|-1) \leqslant \lambda|s|$. Il en va de même pour g, donc les parties réelles de ces deux fonctions entières sont majorées par des polynômes de degré 1. Le résultat vient alors du lemme suivant.

Théorème 0.0.2 (de la partie réelle de Hadamard)**.** *Si f est une fonction entière telle qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ et $K > 0$ avec :*

$$\mathfrak{Re}(f(s)) \leqslant K|z|^m$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors f est polynomiale de degré $\leqslant m$.

Démonstration. On pose $f = u + \mathrm{i}v$ d'une part et $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ d'autre part. On a d'une part l'égalité de la moyenne :

$$a_k = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

et d'autre part :

$$0 = \int_{|\zeta|=r} f(\zeta)\zeta^{k-1}\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}r^k\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

En ajoutant les deux, on obtient :

$$a_k r^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\ \mathrm{d}\theta.$$

Par formule de Cauchy on a $u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta$, d'où :

$$|a_k|r^k + 2u(0) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (|u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| + u(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\ \mathrm{d}\theta.$$

On note alors $A(r) = \max_{|z|=r} u(z)$. Si $A(r) \leqslant 0$ alors $|u|+u = 0$ et alors $|a_k|r^k+2u(0) \leqslant 0$. Sinon, on a quand même $|u| + u \leqslant 2A(r)$ et :

$$|a_k|r^k + 2u(0) \leqslant 4A(r).$$

Dans tous les cas, $|a_k|r^k \leqslant \max(4A(r), 0) - 2u(0)$ ce qui montre en passant à la limite sur r que $a_k = 0$ pour tout $k > m$. □

□

Remarques.

— Le théorème est vrai avec d'autres lois que la loi de Poisson. Pour la loi normale c'est le théorème de Cramér, et pour la loi convolée d'une loi de Poisson et d'une loi normale, c'est un théorème de Linnik.

— Le théorème a une extension aux groupes abéliens localements compacts G : si $x_0 \in G$ et $\lambda > 0$ sont fixés, on peut considérer la probabilité :

$$\mu = \mathrm{e}^{-\lambda}(\delta_{x_0} + \lambda\delta_{x_1} + \frac{\lambda^2}{2}\delta_{x_2} + \dots).$$

Si $\mu = \mu_1 * \mu_2$ et si x_0 est d'ordre 2 ou infini, alors μ_1 et μ_2 sont aussi des lois de Poisson. Si x_0 n'est pas d'ordre 2 ou infini, alors on ne peut rien dire en général.

— Le théorème de Cramér (qui dit la même chose mais pour les lois gaussiennes) s'applique en théorie du signal par exemple : si un bruit est supposé gaussien et qu'on le décompose en deux contributions indépendantes, alors ces deux bruits sont aussi gaussiens.

Recasages.

— 241 : Si on n'a rien à mettre dans cette leçon, ce développement utilise les fonctions génératrices des probabilités (donc des séries entières) pour démontrer un résultat de probabilités qui n'a *a priori* rien à voir. Mais il y a probablement mieux à faire dans cette leçon.

— 243 : cf. 241.

— 245 : On illustre la formule de la moyenne et la formule de Cauchy dans la démonstration du théorème de la partie réelle de Hadamard qui peut être un théorème du plan (avec tous les théorèmes de rigidité des fonctions entières). En plus on utilise le théorème de l'existence d'un logarithme qui peut amener à des discussions topologiques.

— 261 : Très bonne leçon pour ce développement, puisque l'on utilise le fait que la loi est caractérisée par la série génératrice des moments (ce qui est évident, en fait) et même l'énoncé parle de lois de Poisson.
— 264 : C'est encore mieux, puisque les lois de Poisson sont vraiment importantes dans cette leçon.
— 266 : L'indépendance permet souvent d'obtenir des informations intéressantes, mais ce développement le montre particulièrement bien. L'indépendance de X et Y permet de montrer que G_X et G_Y sont entières, ce qui est très fort.