Jour 1 : Modélisation. Le tirage ne m'a pas du tout plu. J'avais le choix entre un texte sur du traitement du signal, et un sur la cryptographie. J'ai survolé le texte de crypto, ça parlait de El Gamal (qui est le seul cryptosystème que je connais) mais je déteste ça donc j'ai directement choisi l'autre.

Le texte expliquait comment, à partir d'un échantillonnage d'un signal périodique composé de fréquences entières, on pouvait récupérer les fréquences qui le composaient de manière efficace. Ça commence par une inversion de Fourier discrète avec une matrice de Vandermonde de racines de l'unité, donc facile. Ensuite on explique qu'au lieu de faire N mesures puis l'inversion de Fourier, on peut écrire $N = \prod_i N_i$ avec les N_i premiers entre eux, faire les $\sum_i N_i$ mesures, puis récupérer les fréquences avec un théorème chinois. Il y avait donc toute une partie qui expliquait que si l'on prenait pour les N_i les premiers nombres premiers de sorte à avoir $\prod_{p \leqslant m} p \geqslant M$ avec M un majorant de la plus grande fréquence du signal, alors on pouvait faire tout ça en $\tilde{O}\left(\frac{\log^2 M}{\log\log M}\right)$ mesures. Ça utilise le théorème des nombres premiers et, sans le dire, un théorème du type $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln x} + \ldots$ ou $\leqslant C\frac{x}{\ln x}$. Ensuite on calcule la complexité de cet algorithme avec une remontée de théorèmes chinois le long d'un arbre, pour avoir une complexité linéarithmique. Le texte expliquait aussi comment corriger d'éventuelles erreurs de mesure et ce qui se passe avec des fréquences rationnelles, mais ça ne m'intéressait pas.

Ma présentation m'avait l'air plutôt correcte et assez bien illustrée, j'avais deux minutes d'avance à la fin donc j'ai expliqué la complexité de la remontée avec les théorèmes chinois. J'ai fait la démonstration de l'inversion de Fourier discrète, et du calcul du nombre de mesures dont on avait besoin ; donc j'espère avoir ajouté assez de contenu personnel. Comme d'habitude à Kléber, Vivaldi retentissait toutes les heures, et donc j'ai fait mon introduction sur ça. *Imaginez que vous soyiez au lycée Kléber et qu'on voue joue à une certaine heure un morceau de Vivaldi. Vous aimez bien la musique baroque alors vous l'enregistrez, et vous voulez rejouer ce son chez vous. Vous pourriez alors vouloir connaître les fréquences qui composent ce son et les amplitudes correspondantes pour les reproduire.* Ça a bien fait rigoler une des membres du jury, qui n'a plus du tout interagi après. Sur les quatre, une s'est complètement tue, et un autre a voulu me demander comment j'avais codé la fonction `crt` native de Sage, et n'a plus jamais parlé (mais il était rassurant, il acquiesçait régulièrement quand je parlais). Les deux derniers ont posé beaucoup de questions :

- On m'a demandé de remontrer comment j'avais codé mes matrices de Vandermonde, donc il n'y avait rien à dire.
- À la toute fin j'expliquais pourquoi on avait du mal à faire marcher la méthode si l'on ne savait pas majorer les fréquences. J'ai donc naïvement fait tourner l'algorithme avec des majorants de plus en plus grands (jusqu'à K disons), et remarqué que ça se stabilisait. On m'a demandé de compter le nombre de mesures dont on avait besoin, alors j'ai expliqué que c'était un $O\left(\sum_{M=3}^{K} \frac{\log^2 M}{\log\log M}\right)$, ce qu'on m'a demandé de calculer. J'ai voulu faire d'abord une majoration brutale en majorant le terme général par une constante du genre $\frac{\log^2 K}{\log\log 3}$. Pour me faire comprendre que c'était bof, on m'a demandé de réexpliquer pourquoi $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\log n} = o(m)$. J'ai

un peu balbutié, et après un peu d'insistance de leur part j'ai retrouvé que c'était une comparaison série-intégrale. Et donc que l'on pouvait faire la même chose avec l'autre somme plus compliquée.

— Après, un autre membre du jury nous a fait remarquer que tout ça était complètement inutile, puisque l'on fait beaucoup de fois les mêmes mesures avec cet algorithme naïf. En fait, on a simplement besoin des mesures pour les $p \leqslant m$ tels que $\prod_{p \leqslant m} p \geqslant K$. Donc le nombre de mesures était relativement faible, mais c'était le nombre de théorèmes chinois à appliquer qui devenait grand.
— Il en a donc profité pour me demander de préciser la complexité du théorème chinois, parce que (bêtement comme dans le texte) j'avais écrit qu'on pouvait passer de mod N_1 et mod N_2 à mod $N_1 N_2$ en $\tilde{O}(\log(N_1 N_2))$. Pendant toute la préparation ça m'a cassé la tête parce que je sais que l'algorithme d'Euclide étendu se fait plutôt en $O(\log(N_1)\log(N_2))$ qui est plus grand. J'ai fait cette remarque à l'oral, et il m'a expliqué que le $\tilde{O}(\log(N_1 N_2))$ provenait juste d'un algorithme plus sophistiqué. Je me sentais un peu bête d'avoir expliqué quelque chose que je n'avais pas compris.
— Toujours à propos du théorème chinois, on m'a demandé s'il n'y avait pas plus efficace comme organisation de l'arbre que d'aligner les N_i dans l'ordre croissant. J'ai remarqué que si l'on regroupait N_1 avec N_k, N_2 avec N_{k-1} et ainsi de suite, alors on avait un $\max_i \log(N_i N_{k-i})$ qui était plus petit que $\max_j \log(N_{2j} N_{2j+1})$. On m'a demandé d'expliquer pourquoi c'était la meilleure manière de faire, j'ai dit que ça m'avait l'air difficile, on m'a demandé si ce n'était pas un genre d'inégalité que je connaissais, j'ai dit *convexité*, on m'a dit *oui très bien passons à la suite.*
— Ensuite il m'a demandé de revenir sur la majoration des fréquences. Comme je parlais de son enregistré, il m'a demandé si l'on avait une majoration naturelle à faire dans la vraie vie. J'ai répondu que les sons audibles ne dépassaient pas 20000 Hz et que l'on pouvait, si l'on supposait que les fréquences étaient des entiers en Hertz, se limiter à un majorant de 20000 ce qui n'imposait de faire qu'une quarantaine de mesures. J'aurais pu y penser mais j'ai choisi assez tard dans ma préparation de parler de son, et donc je n'avais pas réalisé que l'on pouvait avoir ce genre de majoration gratuitement.
— Enfin il m'a demandé de préciser pourquoi on pouvait déduire de $m = O(\log M)$ et du nombre de mesures en $O(\pi(m)\log M)$ que ce nombre était en fait $O\left(\frac{\log^2 M}{\log\log M}\right)$. J'avais bloqué sur ça aussi pendant ma préparation, et je l'ai passé sous le tapis alors que c'était important. En fait pour remplacer le m par $\log M$ dans le O, il faut une majoration du type $\pi(n) \leqslant \frac{n}{\log n}$ à une constante multiplicative ou additive près. J'ai dit que je croyais me souvenir d'une inégalité du genre $\pi(n) \leqslant \frac{n}{\log n} + \dots$, et que l'on pourrait alors en déduire le résultat. Heureusement pour moi c'est vrai, mais je pense qu'il parlait plutôt d'un $\pi(n) \leqslant C\frac{n}{\log n}$ qui est plus facile et qui donne le résultat probablement plus vite.

Au final j'ai un ressenti plutôt bon, surtout que mon tirage était vraiment parmi les pires possibles. J'ai eu du mal à répondre à certaines questions mais je pense avoir su réagir, et c'est ce que le jury veut. Je vis quand même assez mal le fait d'avoir reçu un texte qui aurait clairement dû se être en option B plutôt qu'en option C : il n'y avait pas de calcul formel, à part éventuellement un peu d'algèbre linéaire avec les matrices de Vandermonde pour la transformée de Fourier discrète. Il y avait pas mal de calculs de complexité, mais ils étaient faciles à faire en terme d'algorithmique, les difficultés étaient plutôt sur l'analyse et le théorème des nombres premiers.

Jour 2 : Leçon d'algèbre. Ma plus grande peur était de tomber sur les matrices symétriques ou d'autres leçons nulles comme ça. J'ai eu pas mal de chance sur le tirage : 105 - Groupe symétrique, et 181 - Barycentres. J'ai pris un peu de temps pour lister mes développements, ceux de la 181 ne me plaisaient pas et j'en avais pas mal (5) pour la 105, et plein de choses à dire.

J'ai fait un plan que j'estime vraiment très bon. Une partie sur le groupe symétrique en lui-même en algèbre, donc définitions, décomposition en cycles à supports disjoints, systèmes de générateurs, signature, polynômes symétriques, simplicité du groupe alterné et sous-groupes distingués du groupe symétrique, et le treillis de $\mathfrak{S}_4$ dessiné (assez joliment je trouvais) en annexe. Ensuite une partie sur l'incarnation des groupes symétriques en géométrie, donc le groupe des isométries du tétraèdre et celui des déplacements du cube et mon premier développement, la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ (j'ai beaucoup parlé de ce groupe dans la leçon) ; le théorème de Frobenius-Schur puis la vérification que les représentations irréductibles du groupe symétrique sont bien réalisables sur $\mathbf{R}$, un Frobenius-Zolotarev probablement un peu mal placé, et le produit semi-direct $\mathfrak{S}_4 \cong \mathfrak{V}_4 \rtimes \mathfrak{S}_3$ vu via la suite exacte scindée pour le groupe affine du plan sur $\mathbf{F}_2$; et j'ai terminé la partie avec les graphes de Cayley et l'exemple d'une présentation de $\mathfrak{S}_4$ avec l'action sur le cube tronqué que j'ai dessiné en annexe. Ma troisième partie parlait de combinatoire dans les groupes symétriques, en commençant par mon deuxième développement, la structure en cycles d'une permutation aléatoire qui converge en loi vers des lois de Poisson quand le groupe grandit ; et j'ai terminé la leçon sur un exemple du jeu de taquin impossible et sur la formule de Burnside et les coloriages du cube. Ma défense de plan était, je pense, très claire et bien construite, j'ai juste passé un peu trop de temps sur la première partie donc j'ai dû présenter les deux dernières très rapidement sur la dernière minute pour énoncer mes développements.

Sur mes cinq développements possibles dans cette leçon (Simplicité du groupe alterné, Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, Frobenius-Zolotarev, Loi des cycles d'une permutation aléatoire et Formule de Burnside avec les coloriages du cube), j'ai choisi la table de caractères et la loi des cycles. Je savais que le premier (que je n'avais pas du tout révisé) n'était pas très original mais était facile à retrouver en impro, et que le second était très original (et je l'avais très bien révisé), donc j'avais confiance. Malheureusement (et je ne saurais pas l'expliquer) le jury a choisi le développement sur la table de caractères, et j'ai commencé à mourir mentalement. Je commence à dessiner un cube, les diagonales, j'énonce que je vais expliquer comment on fait agir chaque permutation, et là je cafouille complètement pour la transposition. J'avais écrit le mauvais truc sur mon brouillon, et j'ai pas trouvé comment faire, donc j'ai un peu bégayé et dit *ça fait bien* -1... Puis en faisant le tétraèdre j'ai réalisé que j'obtenais aussi la mauvaise trace pour la transposition, alors à ce moment j'ai encadré les deux cases dans la table en disant *j'y reviendrai, ils me posent problème.* J'ai fini le reste, puis j'ai réussi à retrouver comment agissait la transposition pour chacune des deux représentations, et j'ai fini par remplir la table dans les temps. Mais je mourrais vraiment intérieurement, pour moi c'était complètement mort. Avec le recul je pense que j'ai quand même réussi à réagir puis à me corriger donc c'était peut-être pas si grave.

En termes de questions, j'ai eu (dans un ordre approximatif) :

— Pour fixer les idées déjà, c'est quoi la définition d'un caractère ? J'ai un peu pris peur parce que ça me paraissait bizarre de demander ça après mon développement, mais c'est vrai que je n'avais défini ça nulle part. Bref, j'ai répondu.

— Pourquoi la trace d'une rotation d'angle $2\pi/3$ (dans l'espace) est nulle ? Je n'ai eu absolument aucun problème pour ça, le $1+2\cos(\theta)$ est arrivé instantanément.

— Pour montrer qu'une transposition agit sur le tétraèdre comme une réflexion, qu'est-ce qu'il faut supposer ? J'ai directement réalisé qu'elle me demandait de répondre que les deux arêtes opposées (celle incluse dans le plan fixe et celle qui dirige la réflexion) devaient être orthogonales. Elle m'a demandé de le justifier, alors j'ai réfléchi pendant cinq secondes, puis j'ai dit que le tétraèdre régulier était un 3-simplexe standard, on pouvait le voir comme l'enveloppe convexe des quatre vecteurs de base dans $\mathbf{R}^4$. Elle m'a demandé pourquoi je disais ça alors qu'on était en dimension 3, alors j'ai fait l'analogie avec le triangle et elle était d'accord. Ensuite j'ai dit que les deux arêtes correspondantes étaient respectivement dirigées par (par exemple) $e_2 - e_1$ et $e_4 - e_3$, et que ces deux vecteurs étaient évidemment orthogonaux. Au vu de son regard elle ne pensait pas que j'allais répondre comme ça, mais les autres membres du jury ont hoché la tête donc je pense que ça leur allait.

— On m'a demandé ensuite comment on pouvait voir que $\mathfrak{V}_4$ était distingué dans $\mathfrak{S}_4$, en lisant la table de caractères. Je sais que c'est possible, mais je n'ai jamais regardé pourquoi. J'ai commencé à me dire que ça venait du 0 sur la ligne du triangle, colonne des 4-cycles, en pensant faire le lien avec $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{V}_4 \cong \mathfrak{S}_3$. Il m'a demandé pourquoi, je savais pas trop, il m'a demandé ce qu'était $\mathfrak{V}_4$, et là j'ai réalisé que la colonne des doubles-transpositions était égale à celle de l'identité. Il m'a demandé pourquoi on pouvait en déduire que le sous-groupe était distingué, et j'ai (je ne sais pas par quel miracle) directement réalisé qu'une représentation dont le caractère prenait en $(1\ 2)(3\ 4)$ (par exemple) la même valeur qu'en 1 devait envoyer toutes les doubles-transpositions sur l'identité. Il m'a demandé pourquoi, j'ai expliqué que les valeurs des caractères étaient des racines de l'unité, donc de partie réelle $\leqslant 1$, et que pour que la somme des valeurs propres soit égale à leur nombre, il fallait alors qu'elles soient toutes égales à 1. Il est alors revenu sur la question de pourquoi on pouvait en déduire que $\mathfrak{V}_4$ était distingué, et là j'ai répondu que comme $\mathfrak{V}_4$ était dans le noyau des représentations triviale, signature et du triangle, on pouvait peut-être en déduire que c'était un noyau. J'ai pas tout de suite réalisé que c'était évident au vu de la table que c'était exactement le noyau de la représentation du triangle (en plus j'ai fait le commentaire avec le fait que cette représentation venait de $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{V}_4 \cong \mathfrak{S}_3$, et dire qu'elle était fidèle aurait suffi). Quand je l'ai vu, ils sont passés à autre chose.

— Est-ce que les caractères irréductibles des groupes symétriques, comme pour $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$ sont toujours à valeurs entières ? Alors là, je n'avais pas trop d'idées. Je sais que les représentations du groupe symétrique sont très fortement liées à la combinatoire avec les tableaux de Young donc que ce n'est pas forcément étonnant de voir des nombres entiers apparaître ; je l'ai dit au jury avant de réfléchir plus loin. J'ai commencé par dire que je savais que c'était des entiers algébriques, et alors j'ai eu droit à un *mais du coup, on peut espérer que ce soit dans quel corps au moins ?* En revoyant mon $X^n - 1$ écrit au tableau, j'ai répondu *dans un corps cyclotomique*, en me disant que c'était impossible que ce soit la réponse qu'il attendait. C'était la réponse qu'il attendait.

— On avait passé beaucoup de temps sur le développement, alors il a fallu des questions sur le plan. J'y ai parlé de polynômes symétriques, en énonçant l'action du groupe symétrique sur les polynômes, et en disant que l'on pouvait retrouver la signature en étudiant cette action sur le polynôme de Vandermonde $\prod_{i<j}(X_i - X_j)$. Ils m'ont demandé de préciser, et j'ai commencé à stresser parce que j'avais juste recopié ça d'un livre. J'efface le tableau, et je commence par prendre un exemple simple, en me disant que ça me permettrait d'y voir plus clair et que c'était pédagogiquement une plutôt bonne idée. Je prends trois variables et une transposition, et je remarque que les facteurs du genre $(X_i - X_j)$ sont toujours là mais que certains ont subi un changement de signe, et j'explique fièrement que ce changement de signe est la signature de la permutation. Et là on me dit que ce n'est clairement pas trivial que les facteurs restent les mêmes, alors j'acquiesce, et on me demande si on peut le voir autrement, justement avec des matrices. Comme le polynôme s'appelle Vandermonde j'ai introduit une matrice de Vandermonde des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, écrit que son déterminant était justement la valeur du polynôme de Vandermonde en les α_i. Il fallait un lien avec la signature donc j'ai d'abord pensé à la formule du déterminant $\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod \ldots$, et on m'a dit (et j'ai réalisé tout de suite) que ça n'irait nulle part. J'ai alors écrit la matrice en entier, et fait agir une transposition dessus, bien sûr c'est parce que le déterminant est alterné que ça marche.

— À ce même propos, il m'a demandé si je connaissais les points fixes de cette action. J'ai alors dit que c'était les polynômes symétriques, et il m'a demandé si je connaissais un théorème de structure. Je l'ai énoncé (d'abord en disant que les polynômes symétriques étaient combinaisons linéaires, puis produits des polynômes symétriques élémentaires, et après deux *vraiment ?* j'ai réalisé que j'étais stupide et que c'était évident que ça devait être des polynômes en les polynômes symétriques élémentaires). Il m'a alors demandé si je connaissais un analogue pour les polynômes antisymétriques, et si j'avais une idée de ce que pourrait bien être un polynôme antisymétrique. J'ai d'abord dit que c'était un polynôme qui vérifiait $\sigma \cdot P = -P$ pour tout σ, puis j'ai réalisé que ça ne faisait aucun sens et qu'il fallait prendre $\sigma \cdot P = \varepsilon(\sigma)P$. Pour l'analogue du théorème de structure je n'avais aucune idée, j'ai commencé à dire qu'il fallait peut-être trouver des polynômes antisymétriques élémentaires mais ça ne paraissait pas avoir un grand avenir. Il m'a alors demandé de montrer que les polynômes antisymétriques étaient multiples du polynôme de Vandermonde, *possiblement avec des propriétés de l'anneau* $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$. J'ai directement pensé à la factorialité dans ma tête, mais je l'ai dit plus tard. J'ai commencé à écrire le fait qu'un polynôme était antisymétrique avec une transposition $(i\ j)$, en voulant montrer qu'il était multiple de $X_i - X_j$. J'ai écrit l'équation, essayé avec sa décomposition en facteurs irréductibles, mais je ne trouvais pas comment faire. Ils ont alors voulu passer à autre chose.

— On m'a demandé de calculer le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$. J'ai réagi directement, en disant que c'était un sous-groupe distingué et qu'il ne pouvait pas être trivial, puis que la signature devait y être triviale et donc que c'était le groupe alterné.

— Ensuite il m'a demandé si je savais démontrer que tous les 3-cycles sont des commutateurs. Ce qui précède montre que ce sont des produits de commutateurs, ce que j'ai oublié de dire. J'ai alors commencé à chercher, en disant qu'on pouvait par exemple utiliser le fait que :

$$\sigma(\pi_1\ \pi_2\ \dots\ \pi_k)\sigma^{-1} = (\sigma(\pi_1)\ \sigma(\pi_2)\ \dots\ \sigma(\pi_k))$$

mais j'ai un peu bloqué. On m'a demandé de calculer le carré d'un 3-cycle, ce qui était facile, puis si j'arrivais à en déduire le résultat. Après une petite tentative infructueuse, j'ai trouvé : $(a\ b\ c)$ et $(a\ b\ c)^2$ sont deux 3-cycles donc ils sont conjugués, disons par π, et alors on déduit le résultat de :

$$(a\ b\ c)^2 = \pi(a\ b\ c)\pi^{-1}$$

en multipliant à droite par $(a\ b\ c)^{-1}$.

— La dernière question était un truc bizarrement facile. On prend une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un k premier avec n (avec le recul je pense qu'il voulait le prendre premier avec l'ordre de σ), il faut alors étudier le type de σ^k en fonction de celui de σ. Je me suis dit que ce serait tout facile, alors je commence à écrire σ en produit de cycles à supports disjoints, et je voulais raisonner sur chacun des cycles. Le jury m'a coupé la parole en me disant de commencer par un n-cycle. Alors je me dis que ce serait encore plus facile ; je prends un n-cycle γ et je regarde γ^k. Et là, trou noir, probablement de la fatigue, je ne vois plus rien. Pour avoir quelque chose à raconter je dis que son ordre doit diviser n puisque γ est d'ordre n, et pour une raison encore obscure je ne vois pas du tout l'idée de dire que k est inversible modulo n. La sonnerie a retentit pile quand j'allais dire que l'on pouvait écrire une relation de Bézout, le jury a dit que c'était terminé.

Mon ressenti en sortant était mauvais, j'avais l'impression d'avoir complètement ruiné mon oral. Comme c'est celui d'algèbre j'avais beaucoup d'attentes, ce qui devait se passer extrêmement bien m'a paru trop brouillon et j'avais l'impression de ne pas avoir montré au jury ce que je maîtrisais. J'ai un peu d'amertume sur leur choix de développement, mais je comprends qu'ils profitent du fait de pouvoir voir un peu de géométrie et de représentations, vu comme ces domaines sont détestés en général. J'avais encore mon développement raté en travers de la gorge et pour moi c'était mort. Avec le recul je pense que ce n'était pas si dramatique que ça.

Petite remarque marrante (ou pas, en fait), je connaissais un membre du jury. Il ne me reconnaissait pas et j'avais trop la pression pour dire quoi que ce soit donc j'ai fait l'oral avec lui quand même. C'était un prof de ma prépa que j'avais eu une fois en colle en spé ; j'imagine que c'est suffisant pour dire qu'on ne se connaissait pas. Je me souviens encore de cette colle qui était sur les équations différentielles linéaires, et qui s'était comme son nom l'indique, plutôt mal passée. Mais il est très sympathique.

Jour 3 : Leçon d'analyse. J'avais vraiment peur de cette épreuve, qui aux oraux blancs avait été un peu brouillonne pour moi. J'avais pas mal de leçons horribles sur lesquelles je ne voulais surtout pas tomber, et quelques unes sur lesquelles j'aurais vraiment voulu tomber. Mon tirage : 239 - Intégrales à paramètre ou 262 - Convergences de variables aléatoires et théorèmes limite. Je déteste par-dessus tout les probas, donc le choix était vite fait. Mais en y réfléchissant, mes développements dans 239 ne me plaisaient pas trop et j'avais du mal à trouver quoi y dire. Donc j'ai pris (en me choquant moi-même) la 262, en sachant que je pourrais y mettre deux développements que j'aime beaucoup : la structure en cycles d'une permutation aléatoire (encore !) et les théorèmes de Helly, Prokhorov et Lévy.

Le plan était assez facile à improviser pour une leçon d'analyse : après y avoir mis les différents modes de convergences et leurs interactions, avec des exemples et contre-exemples, j'avais déjà remplit la moitié de la place disponible. J'ai alors fait une deuxième partie sur les caractérisations de la convergence en loi (fonctions de répartition, fonctions caractéristiques avec mon développement, fonctions génératrices), puis sur les théorèmes limite. J'ai seulement écrit les lois faible et forte des grands nombres et le théorème central limite, en me disant que s'ils voulaient un approfondissement je savais les démontrer (ou au moins donner les idées) et que je connaissais l'existence de Berry-Esseen. Il restait alors un demi-rectangle libre sur ma feuille et je n'avais plus rien à dire et pas de troisième partie, donc j'ai écrit une troisième partie extrêmement courte sur l'application de la LGN et du TCL dans la vraie vie. Dans la défense j'ai redessiné le schéma des implications des différentes convergences au tableau (qui était dans l'annexe de mon plan avec des contre-exemples), et j'ai écrit rapidement une LGN et un TCL pour faire bon genre. J'ai eu un peu de mal à expliquer pourquoi j'avais mis mon premier développement (sur les permutations aléatoires) dans la première partie alors que j'utilisais la caractérisation de la convergence en loi par les fonctions génératrices, mais ça ne devait pas être grave.

Mon deuxième développement était composé des théorèmes de Helly, de Prokhorov et de Lévy, et le jury a un peu fait des gros yeux quand j'ai dit que oui, mon second développement, *c'était bien les théorèmes 45, 46 et 47*. J'ai rapidement dit que je devrais passer vite sur celui de Prokhorov si jamais je n'avais pas le temps, et (le ciel soit loué) ils ont choisi (contrairement à la veille) celui sur les permutations aléatoires. Je n'ai eu aucun mal à le faire, même qu'il était un peu trop rapide (c'était vraiment étonnant, je pensais qu'il serait beaucoup trop long). J'ai donc bien insisté sur les moments factoriels qui caractérisaient la loi pour expliquer qu'on avait une loi de Poisson, puis j'ai expliqué le cas particulier du nombre de points fixes qui converge en loi vers $\mathcal{P}(1)$, et le fait que la convergence avait en fait lieu pour tout le vecteur et pas seulement les marginales. J'ai l'impression que le jury était satisfait.

Pour les questions :

- D'abord sur la fin du développement, j'avais écrit $1/\lambda$ au lieu de $1/j$, c'était vraiment rien.
- Ensuite on m'a demandé ce que je pouvais dire des fonctions génératrices, alors j'ai raconté que c'était des séries entières, qu'on pouvait récupérer les moments en dérivant, et qu'elles caractérisaient la loi et la convergence en loi. Il était satisfait et n'a plus parlé, comme sa voisine. Toutes les autres questions sont venues du même examinateur.
- Il m'a demandé de voir si l'on pouvait en déduire vers quoi convergeait le nombre de dérangements dans $\mathfrak{S}_n$. J'ai expliqué qu'un dérangement était une permutation sans point fixe, et donc que la probabilité de tomber sur un dérangement en choisissant uniformément dans $\mathfrak{S}_n$ devait converger vers la probabilité qu'une loi de Poisson de paramètre 1 soit nulle, c'est-à-dire 1/e.
- Ensuite il m'a demandé si l'on pouvait déduire d'une égalité de mon développement l'espérance du nombre de points fixes. J'ai dit d'abord qu'on pouvait le faire à la main avec la formule de transfert, et après j'ai appliqué mon égalité au bon vecteur et c'était évident.
- Apparemment c'était assez de questions sur le développement, donc il a commencé à attaquer le plan. Il a demandé si dans toutes les implications entre les différents modes de convergence, je savais en démontrer un. Bien sûr dans cette leçon, répondre *non* à cette question est catastrophique, alors j'ai choisi le plus facile, $\mathrm{L}^p \implies \mathrm{L}^1 \implies \mathbb{P}$, la première implication est évidente parce que la mesure est finie et la seconde c'est juste l'inégalité de Markov.
- Il a alors demandé si je connaissais un lien entre les convergences L^1 et p.s. (je n'avais rien écrit à part des contre-exemples), alors j'ai directement pensé à Riesz-Fischer que j'ai écrit, pour dire que la convergence L^1 impliquait la convergence p.s. à extraction près. Au lieu de me demander l'autre sens (convergence dominée), il m'a demandé si je savais démontrer ce que je venais de dire. J'ai dit que ça venait de la démonstration de la complétude des espaces L^p, et en me souvenant de toutes les preuves de complétude que je connaissais (sauf celle-ci que j'avais oubliée évidemment), j'ai dit que je croyais me souvenir de l'utilisation du lemme de Fatou. Raté bien sûr, alors il m'a donné des indications, qui débloquaient à chaque fois la situation et j'ai fini par pouvoir terminer.
- Ensuite il m'a donné un exercice (pour voir si je connaissais mon plan), trouver la loi du maximum M_n de variables uniformes $U_1, \ldots, U_n$ sur $[0, 1]$. Je savais comment faire, j'ai sorti les fonctions de répartition, et j'ai conclu. Il voulait la convergence en loi alors j'ai dit que ça convergeait en loi vers δ_1 et pourquoi on aurait pu s'y attendre. Après il voulait contrôler l'erreur donc a posé $X_n = n(1 - M_n)$ et m'a demandé pareil, la loi et la convergence en loi. J'ai bêtement cafouillé parce que j'ai voulu chercher la densité au lieu de simplement chercher la fonction caractéristique. Il m'a dit d'aller plus doucement, et ça s'est bien fini : X_n converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.

Et là c'était déjà fini, alors j'ai sauté de joie intérieurement, d'une part parce que l'agreg était finie, d'autre part parce que j'avais bien réussi mon dernier oral, malgré le fait que c'était un oral d'analyse, malgré^2 le fait que c'était des probas, d'autre part^2 parce que j'allais enfin pouvoir me libérer la tête de tous ces développements. J'avais donc un très bon ressenti en sortant.

Résultats.

Classement : 1000/1

Écrit d'algèbre : 0/20

Écrit d'analyse : 0/20

Modélisation : 0/20

Leçon d'algèbre : 0/20

Leçon d'analyse : 0/20